# DE SERIERUM INFINITARUM PRIMORDIIS.

# DISSERTATIO

HISTORICO-MATHEMATICA,
QUAM SCRIPSIT
ET
AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
PRO
**SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS**
RITE CAPESSENDIS
IN
**UNIVERSITATE LITTERARUM VRATISLAVIENSI**
DIE XV. M. JUNII MDCCCXLIV
H. L. Q. C.
PUBLICE DEFENDET

***JOANNES FRIDERICUS MINGS***
BORUSSUS OCCIDENTALIS.



ADVERSARIORUM PARTES AGENT:

**LUD. SONNENBURG**, STUD. PHIL.
**HERM. FINGER**, CAND. PHIL.
**AD. KENNGOTT**, DR. PHIL.

ADJECTA EST FIGURARUM TABULA.

VRATISLAVIAE,
TYPIS FRITZIANIS.

VIRO

ILLUSTRISSIMO, AMPLISSIMO, DOCTISSIMO

# ERNESTO EDUARDO KUMMER,

PHILOSOPHIAE DOCTORI, ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRO, MATHEMATICORUM IN UNIVERSITATE LITTERARUM VRATISLAVIENSI PROFESSORI PUBLICO ORDINARIO,

PRAECEPTORI OPTIME MERITO,

HASCE STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

D. D. D.

AUCTOR.

# Proœmium.

Serierum infinitarum doctrinam pariter atque alias mathematicorum disciplinas permultas, quas quidem hic enumerare non attinet, recentissimis demum temporibus non quidem originem cepisse, sed tamen stabilitam esse adeoque excultam, ut jam non sit, quod in re dispersa versetur, sed ad artem potius ac praecepta revocata singularem quasi atque propriam analysis partem efficiat satis amplam atque copiosam, inter omnes, qui mathematicos sese profitentur, abunde constat. Est enim ante omnia calculus ille prope divinus, qui plerumque dicitur infinitesimalis, quo invento non modo ipsa analysis mirum quantum aucta sit et amplificata, verum etiam geometria, quae vocatur, sublimior mirabiles fecerit progressus, totaque mathematica tanta ceperint incrementa, ut, qui in omnibus, in quas jam excreverint, eorum singulis partibus solidam sibi firmamque acquirere valeant doctrinam, vix paucos reperias. Ac recte quidem mihi videor judicare, si, quamvis nullo tempore, quo litteris artibusque honor fuit, defuerint viri egregii, qui praeclaris ingenii ac virtutum dotibus insignes divina illa mathematica digna statuerent, in quibus laborem operamque suam collocarent neque infelici successu ea suspiciendis inventis amplificarent, ante nostram tamen aetatem ad illud fastigium, in quo hodie constituta miramur ea fuisse perducta nego. Atque si quae alia est litterarum artiumque disciplina, quae hoc nostro nostrorumque jam proavorum tempore ad longe altiorem perfectionis gradum exculta sit, quam in quo apud Veteres eam collocatam fuisse novimus, sane mathematica sunt, de quibus hoc praedicare

licet. Conferens enim quum rationem atque viam, quam illi (Veteres) sive in veritatibus quibusdam investigandis sive in quaestionibus resolvendis inire consueverant, tum ipsa, quae hac ratione eruta atque detecta habentur supersti-tia, cum iis, quae nostro aevo ad utrumque illud spectan-tia prostant, profecto magnum inter veterem hodiernumque utriusque rei statum discrimen invenis. Namque ad ratio-nem seu methodum antiquis mathemathicis usitatam quod pertinet, ut paucis exponam, haud dubie concedendum est, eam semper aliquid specialis, ut ita dicam, in se habuisse saepeque ad unam tantummodo disquisitionem peragendam idoneam fuisse, ut nova rursus si forte occurrisset quaes-tio, de nova quoque inquirendi via cogitandum esset. Id quod apud nos omnino e contrario se habet, quum quae-vis rei absconditae indagatio, ut perfecta sit et cum artis indole ac regulis congrua, generalitatis speciem aliquam prae se ferre debeat, sicque unius quaestionis resolutione probe peracta ad ejus normam alia, quae vel eundem finem vel similem spectent, problemata innumerabilia pertractari perducique ad exitum possint. Et haec quoque causa esse videtur praecipua, cur, si alterum illud, ambitum scilicet sive amplitudinem artis nostrae respicimus, ea, quae re-centiore tempore in lucem prolata sunt, longissimo post se relinquant spatio illa, quae Veterum studiis elucubrata ac-cepimus. An dubitas, quin a recentioribus uno saeculo plura detecta sint, quam ab antiquis omnino tot saeculis inveniri potuerint? Sane Archimedes et Apollonius si nostro aevo reviviscerent, in stuporem raperentur visis in-ventis, quae a posteris suis in apricum producta; neque enim unquam sibi persuasissent patere ad talia mortalibus aditum! At non solum, quam modo leviter perstrinxi, illa inquirendi rationum diversitas est, quae nobis hoc tantum inter veterem mathematicorum hodiernumque statum dis-crimen contemplantibus tanquam praecipuam id efficiendi causam se offerat, sed potius aliud quid scilicet ipsum id, unde illa quasi enata est accipienda: quod recentiores in-finiti continuique ideam non modo admittunt in calculo quippe sublimiore, sed is ipse ejus fere solius fundamento

nititur; quam Veteres quidem in mathematicis rebus omni modo fugiendam esse censebant. Etenim cui uni calculus differentialis atque integralis superstructus est principio: duas pluresve quantitates, etiamsi in infinitas abierint, id est aut evanescant aut in infinitum augeantur, finitam tamen semper inter se retinere rationem; unde communi recentiorum geometrarum consensu probatur, duas quasvis quantitates aequales esse, quae quantitate differant adeo exigua, ut minor alia proponi nequeat, veluti figuram quamlibet curvam sumi posse pro polygono eidem inscripto, quod infinita numero latera habeat; id veteres plane rejiciebant hanc solam aequalitatis notionem habentes: aequalia esse, quae nihilo differant; — ideoque, ut unum saltem hujus rei testem producam, Archimedes tantum abest, ut sententiam illam recentioribus laudatam probaret, ut spatia quaedam parabolae segmento inscripta, quotcunque tandem fuerint, segmento ipso minora esse concluderet, quod ea polygono cuidam aequalia essent. Verum haec in transcursu!

Si igitur in universum id verum est, quod supra commemoravi quodque neminem facile, qui pulverem istum eruditum attigerit historiamque mathematicorum aliqua cum animi attentatione perlustraverit, negare posse existimo: differentialis calculi integralisque inventionem et usum prae ceteris omnibus, quibus recentiora saecula insignita sunt, inventis ad hunc, qualem modo exposui, totius artis nostrae et perfectionis et amplificationis gradum assequendum plurimum contulisse; sententia haec in serierum infinitarum doctrinam maxime valet. Nam qui tanquam principes et, ut ita dicam, heroum instar in hac tam insigni utilitatisque ferace disciplina excolenda eminent viri ingeniosissimi, omnes fere, veluti ill. Moivreum, Stirlingium, Eulerum, Lagrangeum, La Placeum aliosque multos, degisse scimus ac floruisse demum post calculum illum sublimem inventum, qui in plerisque illud genus perscrutationibus adhibitus procul dubio non solum summo iis emolumento fuit, sed etiam commoditates praebuit innummerabiles, ut, si ipse non suppetiisset, dubium sit, an tam prospere iis omnia successissent tantique, quantos jam diximus, in hac

foecundissima analysis parte essent progressus facti. — Quod quum ita sit, quaeri potest, quinam status fuerit hujus disciplinae, quo tempore calculus infinitesimalis in medium prodiret, vel quae jam cognitae fuerint series infinitae prius, quam ille publici juris factus sit; qua quidem quaestione obsolvenda haud scio an quidquam magis idoneum esse possit ad ipsa illa comprobanda, quae paulo ante de illius calculi ad disciplinam hanc tam stabiliendam quam augendam vi pronunciata sunt. Et hinc quoque est, cur non inanem mihi visus sim suscipere laborem, immo vero utilem et ipsi mihi et aliis, quibuscunque hujus rei accuratior in optatis fuerit cognitio, si ad quaestionem hanc rite investigandam me accingerem et, quae ante calculum illum praeclarissimum jam elucubratae quidem, sed per tam varia excellentissimorum mathematicorum scripta dispersae essent atque dissipatae, ejusmodi series colligerem et in unum quasi fasciculum congererem. Quo quidem peracto simul huic quoque, quae est de origine serierum infinitarum, quaestioni satisfactum iri putavi. Contendo enim et per totam hanc disquisitionem potissimum id declarare conabor, series infinitas ex sola figurarum geometricarum dimensione, — sive longitudinem spectes linearum curvarum, sive spatia, quae vel solis curvis vel mixtim curvis rectisque lineis contineantur, sive denique ipsa cujusvis generis corpora, — originem cepisse: imprimis vero circuli et hyperbolae quadraturam esse, quae jam ab antiquissimis inde temporibus per tot saecula usque tentata ac quaesita primam ad eruendas ejusmodi series ansam dederit. Quod revera ita esse facile tibi persuadebis, si perlecta hac qualicunque dissertatiuncula omnes fere, quae ante calculum infinitesimalem cognitae fuerint atque enodatae, series infinitas ad circuli et hyperbolae spatia invenienda referri cognoveris. Ipsam autem disquisitionem hanc quo majore pro re nata ratione ac via peragerem, ita eam instituì, ut, quiqui id calculi genus aggressi sint exercuerintque viri clarissimi, de iis singillatim dissererem ordine deinceps, quo temporis ratione habita semet ipsos excepe-

rint; et ut certum aliquem limitem haberem, quo usque perducta oratio defineretur, placuit ultra eum annum non progredi, quo Leibnitius calculi sui differentialis et integralis principia primum cum orbe litterario communicasset, id quod fecisse eum constat in Actis Lipsiensibus anno 1684.

---

## §. 1.

Quod modo in antecedentibus leviter indicavimus, nunc vero fusius explicaturi sumus: series infinitas initio non excitatas esse, nisi figurarum geometricarum dimensione, id primum jam Archimedis, celebratissimi antiquitatis mathematici, scriptis declarari videtur, qui, licet non primus illud inquirendi genus attigerit, tamen inter omnes mathematicos antiquos haud dubie plurimum in eodem versatus est. Quadravit enim ille parabolam circulique dimetiendi prima quasi lineamenta dedit; quin etiam ellipsis lineaeque suae spiralis spatium jam contulit cum circulo. Verum non planas solum figuras hunc in finem consideravit summus ille mathematicus, sed ad corporum etiam magnitudinem inveniendam animum advertit, quemadmodum, quae de conoidibus sphaeroidibusque superstitia habentur, ipsius inventa luculenter demonstrant. Quibus omnibus fere scriptis revera id quoque dilucidatur, eum in ejusmodi perquisitionibus jam in series quasdam infinitas deductum esse, etiamsi ipse nullas earum formas dederit; id quod nos tamen offendere nullo modo debet. Etenim ignarus etiamdum atque expers signorum rationumque, quibus nos jam brevitatis commoditatisque causa uti consuevimus ipsas, quae vel instituendae vel jam peractae sint, operationes mathematicas indicaturi, omnia, quae perficienda voluit significare, verbis exprimere coactus erat; quae tamen si quis nostro more signis formulisque adhibitis in conspectu ponere voluerit et ad earum speciem transferre, is pluribus locis sibi series formandas esse inveniet. Nimirum

hac ratione nobis persuademus Archimedem, si non in aliis perscrutationibus, certe tamen in quadranda parabola seriem infinitam exhibuisse, cujus termini in geometrica ratione sint, exponente sive indice $\frac{1}{4}$.[1]) Quod quum ita sit, equidem non possum, quin Montuclae, viri honoratissimi, sententiae suffrager, qui in historia sua mathematicorum, ubi de seriebus infinitis verba facit: „Archimede, inquit, „parait être le premier, qui ait trouvé la sommation d'une „progression geometrique décroissante continuée à l'in- „fini.“[2]) Invenit autem Archimedes hanc parabolae quadraturam polygono quodam ejusdem segmento inscripto, cujus ea erat natura, ut minus continuo esset, quam sesquitertium trianguli eandem ac segmentum basin atque altitudinem habentis, quantitate quadam, quae magis magisque minueretur, quo plura poligonum latera haberet, propiusque ad segmentum ipsum accederet.

## §. 2.

Post Archimedem multa praeterierunt saecula, in quibus nulladum serierum infinitarum vestigia vel apud summos, qui in iisdem aetatem degernnt, mathematicos apparent; nox illa atque tenebrae, quas per tam longum annorum spatium omnibus fere artibus litterisque obductas fuisse scimus, etiam mathematicis offusae erant, illisque per totum orbem diffusis etiamsi non plane interrupta erant ac neglecta horum studia, tamen pari, atque antea vel hoc nostro praesertim aevo, cura et diligentia non colebantur. Itaque ex eo inde tempore demum, quo, uti ceteris bonarum artium doctrinis, ita ipsis quoque mathematicis nova rursus lux vitaque suboriri coepit, etiam quae ad hanc nostram quaestionem spectent, talia nos inventuros esse sperare possumus. Est autem qui, quo tempore majore denuo industria et assiduitate litterarum studia trac-

1) cf. Archimedis opera Oxonii anno MDCCXCII edita, pag. 17—34; (Τετραγωνισμὸς Παραβολῆς).
2) Montucla: histoire des mathematiques, nouvelle edition (quae quidem semper hic intelligenda erit) per La Lande 1802, Tom. III, pag. 207.

tari coepta sunt, omnium primus repetita veterum memoria has mathematicorum artes studio summo instauravit, Franciscus Vieta, auctor ille clarissimus „Analysis speciosae;“ qui inter alias occupationes et negotia, a quibus capax ejus et indefatigabile ingenium nunquam vacasse traditur, in mathematicis praecipue industriam ac vires suas exercuit et, quidquid ab antiquis in eo genere inventum et scriptis, quae temporis injuria aut perierant aut obsoleverant, proditum memoratur, ipse assidua cogitatione renovavit et multa ex suo ad illorum ingeniosa reperta addidit. Quid multa? Tam profunda fuisse perhibetur meditatione, ut saepius visus sit totum triduum continuum in cogitatione defixus ad mensam lucubratoriam sedere sine cibo et somno, nisi quem cubito innixus nec se loco movens ad refocillandam per intervalla naturam ceperit.[1]) At ne nimis longe a proposito aberret oratio et in laudibus viri hujus praestantissimi efferendis, qui et sine mea qualicunque praedicatione praeclaris litterarum monumentis suis meritisque de scientia mathematicorum summis immortalem sibi apud posteros paravit gloriam, excurrat in res, quas hic enarrare minus attineat; quae de ipso ac scriptis ejus proferre possum, reliqua missa faciam ad ea tantum, quae magis ad hanc disquisitionem meam pertineant, animum advertens. In his vero notatu dignissima sunt ea, quae ipse de circuli dimensione in lucem protulit, quam sine dubio accurata sua meditatione longe perfectiorem reddidit et ad usum magis accommodatam, quam Archimedes posteritati tradiderat. Dedit enim praeter alia multa, quibus merita ejus de illius scientia comprobantur magna aestimatione digna, non modo pro ambitus ejus longitudine numerum vero jam adeo propinquum, ut diametro $= 1$ posita ad decimum usque in fractione decimali locum ipsum exaequaret,[2]) sed etiam pro area ejus definienda formulam omnino seriei infinitae specie indutam, hanc:

---

1) cf. Vietae opera mathematica a Francisco a Schooten anno 1646 edita, quibus praecedit auctoris vita ex Jac. Aug. Thuani historiarum libro 129mo excerpta.

2) cf. Ejusdem Opera mathematica pag. 445.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}$$

etc.

quae est ad unitatem, ut quadratum circulo inscriptum ad ipsum circulum;[1]) quamque, si quidem pro serie infinita eam habere libuerit, primam omnium, quae lucem adspexerint, statuendam esse videmus, nimirum in circuli dimetiendi gratiam erutam. Neque difficile est intellectu, qua ratione ill. Vieta ad hanc infinitam formulam pervenerit. Nam si, ut ille fecit, ponamus diametrum circuli esse $=r$, polygoni vero eidem inscripti laterum omnium aequalium numerum $=n$, quorum cuique respondeat idem angulus $=A$, cujus vertex in centro sita sit, erit hujus polygoni aequilateri spatium $=S=\frac{nr^2\sin A}{2}$; si vero laterum numerus $=2n$, erit $S_1=nr^2\sin\frac{1}{2}A$. Est igitur polygonum n laterum ad polygonum $2n$ laterum, ut $\cos\frac{A}{2}:1$, et pari modo polygonum $2n$ laterum ad id, cujus laterum numerus $=4n$, ut $\cos\frac{A}{4}:1$ et sic deinceps in infinitum. Itaque in omni summa erit polygonum n laterum ad polygonum $2^p n$ laterum, ut $\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{4}A.\cos\frac{1}{8}A.\cos\frac{1}{16}A$.......... ad 1. Jam vero circuli spatium pro ultimo limite accipi potest, ad quem polygona haec pro sua quodque laterum multitudine magis magisque appropinquare nitantur, unde sequitur, ut polygonum n laterum sit ad circuli spatium, ut $\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{4}A.\cos\frac{1}{8}A$............ ad 1. Quodsi primum ponatur $n=4$, ideoque $A=90^0$ et $\cos\frac{1}{2}A=\cos 45^0=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, ex formulis, quae cosinus angulis illis singulis continuo dimidiatis respondentes in numeris exhibent, reliqua sine ullo labore depromuntur. Reperitur enim tum, pro $n=8$, $\cos\frac{1}{4}A=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$, et $\cos\frac{1}{8}A=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$ et sic reliqua. Quibus comprehensis et secundum legem

---

1) cf. Ejusdem Opera mathematica pag. 400.

indicatam conjunctis infinita illa formula supra proposita pro circuli spatio inveniendo provenit, diametro = 1 assumta. Notandum vero est, seriem hanc in ipsius Vietae operibus perperam scriptam reperiri propter omissam ante quodque inferius signum radicale fractionem $\frac{1}{2}$, id quod Montuclam illustrem historicum fugisse videtur, qui talem eam transcripsit,[1] qualis apud Vietam invenitur.

§. 3.

Qui post Vietam recensendi hic veniunt viri egregii quum ob rationem ac viam, quam in indagationibus suis ingressi sunt cum serierum infinitarum natura et indole ita conjunctam, ut vix ac ne vix quidem dijudicare queas, perquisitiones eorum sintne ad series infinitas referendae, an alium finem quemcunque spectent, tum ob ipsas, quas unus eorum alterve hac ratione elucubravit, series infinitas; in eorum numero non dubito etiam Bonaventuram Cavallerium habere. Is enim Kepleri exemplo, qui primus Archimedea promovere studuerat,[2] excitatus eandem, quam perantiquus ille mathematicus persecutus fuerat, rationem perscrutandi, quamque vulgo methodum exhaustionis appellamus, denuo repetens multis eam nominibus amplificavit exemplisque illustravit.[3] Neque tamen dubitandum inter illam ab Archimede ceterisque antiquitatis mathematicis adhibitam rationem atque Cavallerianam aliquantum discriminis intercedere, quod clare perspicere non nihil interest, quum eo simul, quid quantumque hic excellentis

1) Hist. des mathem. Tom. I. pag. 611.

2) In nova stereometria doliorum vinariorum, imprimis Austriaci, quae eadem continet supplementum stereometriae Archimedeae, Lincii 1615 in fol. edita.

3) In duobus voluminibus, quorum alterum Bononiae primum anno 1635 et deinde iterum anno 1653 editum auctor „Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,“ alterum vero ibidem anno 1647 editum „Exercitationes geometricae“ nuncupavit; posterius nihil aliud, nisi eorum, quae in priore continentur, fusior quaedam et ad usum vocata explicatio est.

ingenii vir ad excitandam ipsam nostram analysin sublimiorem, calculum infinitesimalem dico, profundis cogitationibus suis contulerit, manifestum fiat. Archimedes enim, si quando demonstrare vult, quae figurae ad figuram proportio sit, sive ea plana fuerit, sive solida, utramque in plures particulas dividit easque invicem componit quum singulas tum omnes simul sumtas, ut quod verum sit inde eliciat. At idem quoque Cavallerius! dixerit fortasse quispiam. Nego atque non nego! Nam in quas Archimedes figuram dirimit, particulae illae in plana itidem planae, solidae vero in solida sunt; Cavallerius autem figuras tanquam elementis constare supponit, quae in planis lineae sint, in solidis vero plana; quaeque quum adeo minuta ei accipiantur ac tenuia, ut jam non sub sensus cadant, sed vere sint geometrica (indivisibilia), ipse quoque hinc argumenta sumsit ad refutandam Guldini pravam sententiam, qui Keplerum ei in hanc cogitandi inquirendique viam ducem fuisse affirmaverat;[1]) ait enim ipse:[2]) illum (Keplerum) ex minutissimis corporibus quodammodo majora componere iisque tanquam concurrentibus uti, se autem tantummodo dicere, plana esse, ut aggregata omnium linearum aequedistantium, et corpora, ut aggregata omnium planorum pariter aequedistantium. Atque quod quasi fundamentum totius geometriae suae haberi voluit, ut magis id manifestum redderet: „Ut inveniamus, inquit, quam „rationem habeant inter se duae figurae planae vel soli„dae, sufficiet nobis reperire, quam in figuris planis inter „se habeant rationem earundem omnes lineae et in figuris „solidis earundem omnia plana juxta quamvis regulam as„sumta, quod novae hujus meae geometriae veluti maxi„mum jacio fundamentum.“[3]) Quum igitur, si ita placuerit, uterque figuram, de qua quaeritur, in plures particu-

1) Guldini liber: de centro gravitatis (centrobaryca), annis 1635—1642 ed., sectio 1—42 vel pag. 3—350.

2) Exercit. geometr., exerc. III. pag. 180 et exerc. I., n. 7. 8. 9.

3) Geometria indiv. lib. II prop. 3 coroll., et Exerc. geom. exerc. I. pag. 27, et exerc. III. pag. 207.

las dividat, ex quibus figura alia componitur, Archimedes quidem de una ex altera ita conjicit, ut singulas seorsum consideret; Cavallerius autem idem de utraque statuit, quod sibi persuadet, eas tandem in unam coalescere. Itaque quum idem uterque eadem via quaerat, longe diversis principiis utitur. Neque enim Archimedes statuit aut statuere unquam potuit, componi planum ex lineis, solidum ex planis; quod utique absurdum erat cogitasse. Atque hoc manifestum est ex V. propositione libri de conoidibus et sphaeroidibus, in qua quum hoc sibi demonstrandum proposuisset, ellipsin ad circulum majori ejus diametro circumscriptum eandem rationem habere, quam minor ejus diameter ad majorem, argumentationem instituit, quae eo demum exit, ut colligatur eandem illam rationem intercedere inter duas lineas, quae a quovis communis diametri puncto ad ellipsis et circuli ambitum ad rectos angulos ducuntur. Quidni ergo Archimedes ita concluserit? Atqui linearum, quas diximus, priores quidem ellipsin, circulum vero posteriores componunt, et ut omnes praecedentes ad omnes sequentes ita se habet una praecedens ad unam sequentem; ellipsis igitur ad circulum, ut minor ejus diameter ad majorem. Hoc argumento Cavallerius utatur, non Archimedes aut alius quispiam ex antiquis, qui valde metuunt, ne ab Euclide ferulis vapulent! Quid? Veteres in corporum planorumque certis limitibus circumscriptorum dimensione primum duas inquirere solebant quantitates finitas, quarum una ipsa, de qua quaereretur, quantavis quantitate minor esset, major altera, ut illa his, tanquam limes utriusque communis, interposita esset, ad quam deinceps ab utraque quasi parte, quantumvis fieri licebat, [appropinquare nitebantur, adjecta demonstratione, quantitatem quaesitam isto limite neque majorem esse neque minorem posse: Cavallerius autem neglectis his duabus quantitatibus f i n i t i s statim ad inveniendum illum limitem seu verum quantitatis quaesitae, ut verbo utar, valorem inquisitionem suam dirigit, quem summam esse multitudinis indefinitae quantitatum infinite parvarum in animum inducit. Dein vero calculi progressu quasi mutans senten-

tiam suam pro illis infinite parvis finitas ponit ipsis illis proportionales substituitque in summae indefinitae locum finitam aliquam quantitatem item ipsi proportionalem; id quod sine ullo mendo fieri licet, quum non de vera ei omnibusque numeris expleta illarum infinite parvarum quantitatum sive partiuncularum, in quas corpus aut planum dimetiendum aequabiliter divisum esse tibi animo fingas necesse est, multitudine, sed de ipsi tantum proportionali quaeratur, neque quidquam impediat, quominus duae quantitates aequabili ratione in infinite multas partiunculas dirimantur.

Unde jam perspicis cogitandi rationem, qua vir ille ingeniosissimus a natura rei cujusdam limitibus circumscriptae finitaeque ad infinitae ideam ut ita dicam assurgat, quam veteres plane reformidasse scimus ac perhorruisse; Cavallerium autem in pervestigationibus suis ea utentem non ita longe ab ipso infinitesimali calculo abfuisse constat, quam fortasse putaveris. Verumtamen qua primus novam hanc viam ingressus suo jure nobis celebratur, laus ejus atque gloria aliquanto minuitur accessa simul vituperatione, in quam apud quemque vere mathematicum venire debet propter ambiguam illam indivisibilium suorum notionem, quippe qua omnibus ejus argumentationibus incredibilis quaedam obscuritas offundatur. Illa enim quum in planis lineas esse, plana autem in solidis velit, pugnantia loquitur, iisdem tanquam elementis constare figuras autumans; neque enim linearum multitudo quantavis magna superficem ne minimam quidem efficere, neque planorum congeries solidum potest, quoniam illae utpote geometricae nihil aliud, nisi longitudines, haec vero solummodo longitudines latitudinesque occupant. Utitur ergo Cavallerius lineis et planis individuis sive infinitis, de quibus concludat id, quod de finitis ei quaeratur. Unde quae oritur intelligendi difficultas vel nimis saltem incerta indivisibilium istorum notitia jam ab ipsius aequalibus, imprimis vero a Guldino, reprehensa quidem atque exagitata, sed nondum tamen sublata est. Id enim primo demum Wallisio et, qui potissimum hujus vestigiis ingressi sunt, Mercatori ac Neutono factum esse infra vi-

debimus, quamquam in horum quoque lucubrationibus persaepe obscuritatem quandam ab ejusdem infinitatis notione indefinita profectam animadvertimus, qua recentissimo demum tempore dispulsa in laetissima luce collocata est haec tota infinitesimalis calculi doctrina. Sed ut redeamus ad id, unde huc degressi sumus, Çavallerius ab ista linearum planorumque modo descriptorum contemplatione ad numeros iisdem respondentes transiens pro ipsis consummandis illorum potius numerorum certa quadam lege in infinitum progredientium summam inquirit, quod mea quidem sententia nihil aliud est, nisi serierum infinitarum quaedam consideratio. Substitutis igitur pro lineis omnibus parallelis, quas in rectangulo aliquo et in triangulo ipsius dimidiam partem coaequante cogitari licet multitudine infinitas, numeris certo ordine, id est in ratione arithmetica progredientibus et ad quemcunque gradum n elevatis, legem pro iis generalem invenit, ex qua eorum omnium, qui ad rectangulum pertinent, summae ita sunt ad eos, quibus triangulum constituitur, ut $n + 1$ ad 1. Itaque non ipsas illas summas exhibuit, sed earum tantum rationes. Quam autem apposuit, legis hujus demonstratio ultra numerum $n=4$ non excedit; significante enim n littera numerum quattuor majorem, ipsius veritatem ex analogia conjicit colligitque. Ipsam vero demonstrationem illam si ad exitum usque perlegere volueris, mehercule, in quo propter dicendi genus, quo auctor usus est, nimis verbosum atque contortum patientiam tuam tentare possis, suscipies.[1]) Quapropter neglecta illa libenterque omissa ad ipsas altiorum ordinum series arithmeticas te conferre malueris et ex earum, quae jam extat, doctrina ad legem istam examinandam comprobandamque argumenta petere. Hinc enim novisti esse summam seriei: $1+2+3+4+\ldots+r=\frac{r(r+1)}{2}$, ubi nimirum $n=1$ est; summam vero numerorum, quorum quis-

1) Geom. indiv. lib. II. propp. 15, 16, 17. 22 et 24; cf. etiam Exerc. geom., exerc. I. pag. 40 et 50; et excer. IV. pag. 274 sqq.

que pariter ac multitudo $=$ r, esse $r^2$. Erit igitur illa ad hanc, ut $\frac{r(r+1)}{2}$ ad $r^2$. Jam vero hujus seriei termini, ut ad Cavalleri sententiam revertamur, accipi possunt pro singulis deinceps lineis in triangulo supra indicato parallelis, multitudine quippe infinitis, ipsum vero r pro latere rectanguli; qua conditione, id est pro $r=\infty$, proveniet $\frac{r(r+1)}{2}$: $r^2=1:2.$[1] Eodem modo, si $n=2$, ostenditur summam seriei: : $1+4+9+16+\ldots\ldots+r^2=\frac{1}{6}(2r+1)(r+1)r$ ad summam omnium numerorum, quorum quisque $= r^2$, multitudo autem $=$ r, esse, ut $\frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)$ ad $r^3$, hoc est pro $r=\infty$, ut 1 ad 3[2]); et sic deinceps invenitur pro $n=3$, quam inter se habeant istiusmodi summae, ratio haec, ut 1 ad 4; — quo modo quantumvis pergere licet. (Cf. etiam Montucla: hist. des math. Tom. II. pag. 37—42.)

## §. 4.

Quam modo explanavi, Cavallerii in dimetiendis figuris geometricis adhibitam perquirendi rationem amplificare magisque ad calculum quasi aptare studuit Joannes Wallisius in „Arithmetica sua infinitorum“ anno 1655 Oxonii primum edita, in qua, quae jam in opusculo „de sectionibus conicis“ inscripto ejusdem Cavallerii vestigiis inhaerens protulerat, iisdem ad numerorum calculum revocatis paene solas series infinitas consideravit earumque summas sibi inquirendas proposuit. Leguntur enim in hoc opusculo statim ab initio haec ejus verba: „Suppono in limine (juxta Bo-“ „naventurae Cavallerii geometriam indivisibilium) planum“ „quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari: vel“ „potius (quod ego *mallem*) ex infinitis parallelogrammis“ „aeque altis; quorum quidem singulorum altitudo sit totius“ „altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva: (esto“ „enim $\infty$ nota numeri infiniti;) adeoque omnium simul al-“

1) Geom. indiv. lib. II. prop. 19 coroll. 2; et Exerc. geom., exerc. I. pag. 35.

2) ibidem prop. 24, et exerc. I. pag. 50 sqq.

„titudo aequalis altitudini figurae.“ Et deinde paucis interjectis, quibus Cavallerium itidem lineas suas dilatabiles esse supposuisse sive tantillam saltem spissitudinem habere, ut infinita multiplicatione certam tandem altitudinem sive latitudinem possint acquirere, tantam nempe, quanta sit figurae altitudo, ideoque rem eodem redire, exponit, ita pergit:[1]) „Quod“ „autem de lineis et parallelogrammis perinde nominandis di-“ „ctum est, intelligendum etiam erit de circulis et cylin-“ „drulis, vel etiam de planis quibusvis et prismatibus super „illa plana constitutis: dummodo supponantur tantam sive“ „crassitiem sive altitudinem habere, quanta est $\frac{1}{\infty}$ altitudinis“ „illius figurae, quam constituunt. Nam cylindrus nullius altitu-“ „dinis vel infinite exiguae quid aliud est, quam circulus? et“ „prisma altitudinis vel nullius vel infinite exiguae perinde“ „atque planum tractari poterit.“ — Quibus verbis auctor quid aliud, nisi a Cavallerio monstratam cogitandi perquirendique viam sibi ante oculos obversari eamque in suis se indagationibus secuturum esse indicat? Quo quidem revera facto quum tam prospere sibi res succedere vidisset, ut tradita conisectionum doctrina simul januam patere intelligeret, per quam ingresso sibi curvarum naturam ac proprietates longe accuratius pervestigare liceret, non solum postea se aliquando ejusmodi pleniorem perfectioremque curvarum disquisitionem suscepturum esse promisit,[2]) sed praestitit etiam promissum edendo opere illo supra commemorato, quod idem vel ex ipsius professione[3]) initium inde sumit, ubi Cavallerii methodus indivisibilium definit. Atque hinc quoque ansam sibi datam esse confitetur, cur, ut ille librum suum inscripserit „geometria indivisibilium“, sic ipse methodum suam „Arithmeticam infinitorum“ nominandam esse duxerit. Ipsum tamen Cavallerii librum sese nec ad manum habuisse et apud bibliopolas pluries frustra quae-

---

1) Wallisii opera math. pars altera Oxonii 1656 edita, Tractatus: de sectionibus conicis, prop. I.

2) In appendice eidem opusculo de sectionibus conicis adjecto.

3) cf. Ejusdem libri dedicationem.

sivisse affirmat, sed methodum ejus in Torricellii scriptis mathematicis, in quae exeunte anno 1650 incidisset, expositam invenisse. At ne diutius immorer rebus enarrandis, quae ad quaestionem mihi propositam minus pertinere videantur, ad ipsum opus illud praeclarissimum perstringendum accedam.

Ac primo quidem, ut a facilioribus inchoaret, series simplices aggressus est easdem, quas jam Cavallerium pertractasse novimus, invenitque et ipse rationem, quam, cujus termini arithmetice sint proportionales sive juxta naturalem numerorum consecutionem a puncto inde seu nihilo (eâdem quantitate) continuo crescant, seriei summa habeat ad summam totidem maximo ultimove termino aequalium, esse ut 1 ad 2.[1]) Quo reperto ad infinitam seriem quantitatum in duplicata ratione arithmetice proportionalium, sive cujus termini item a puncto nihilove inchoati constituuntur naturalibus numeris ad secundum gradum evectis, properat ejusque summam ad seriem totidem maximo termino aequalium esse docet, ut 1 ad 3.[2]) Pari modo ostendit summam seriei infinitae quantitatum in triplicata ratione arithmetice proportionalium sive numerorum naturalium ad tertium gradum elevatorum et a puncto inde continuo crescentium ad seriem totidem maximae aequalium quantitatum esse ut 1 ad 4;[3]) et sic deinceps pro omnibus reliquis ejusdem generis seriebus infinitis rationes dedit legitimas, ita quidem, ut inducta pro iis hac nova appellatione, ex qua prima mihi commemorata series lateralium sive primanorum audiebat, altera vero secundanorum, tertia tertianorum et ita deinceps simili modo reliquae, tabulam proponeret ad libitum usque continuandam, quae ipsas exhiberet.[4]) Quibus jam cognitis aditum sibi patefactum animadvertit ad investigationem rationum, quas ad summam totidem maximo termino aequalium haberent ejusmodi series infinitae, quarum

---

1) Arith. inf. prop. 2—19;
2) ibidem prop. 19—39.
3) ibidem prop. 39—43;
4) ibidem prop. 43—45.

termini essent quotaecunque radices sive numerorum naturalium sive omnino quantitatum arithmetice proportionalium a nihilo inchoatarum et continuo crescentium, quasque aequabili modo series subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum etc. nuncupavit. — Addidit autem his quoque tabulam, ex qua colligeretur, ejusmodi serierum infinitarum rationem ad seriem totidem maximae aequalium quantitatum esse eandem, atque unitatis ad auctam unitate fractionem, cujus numerator unitas, denominator vero ipse numerus radicis esset.[1]) Id quod perficiens jam extra fines Cavallerii investigationi constitutos egressus est, quem eas tantum series infinitas considerasse vidimus, quarum termini non essent evecti, nisi ad gradum numero integro indicatum. Wallisius autem transgressus hunc limitem campum videbat, in quo industria manare latissime posset; atque hinc jam ita eas pertractare coepit, quasi essent quantitates simplices. Nimirum iis pervestigandis quattuor priores calculi, quas vulgo dicimus, species algebraicas adhibuit, ut unam per alteram quamlibet junctis omni, quo fieri licebat, modo his speciebus non solum augeret minueretve, sed etiam earum, quae denuo hoc calculi usu proveniant, rationes inquireret ad quamvis aliam vel saltem ad summam totidem maximo in iis termino aequalium.[2]) Verumtamen in omnibus his operationibus rem ita instituit, ut, exempli gratia in multiplicatione[3]) vel divisione[4]) unius seriei per alteram, non totam utramque calculum integrum ingredi juberet, sed unius terminus unus divideretur vel multiplicaretur per unum tantum alterius; unde factum est, ut in dividenda qualibet praedictarum serie per aliam superioris gradus in series reciprocas[5]) incideret, quarum indices nimirum negativi sunt. Quod autem de multiplicatione divisioneque annotavimus, idem quoque de subtractione additioneque valere per se intelligitur; atque hic quoque accidit, quod ipse

1) Arith. inf. prop. 46–55;
2) ibidem prop. 64 seqq.
3) ibidem prop. 63.
4) ibidem prop. 81.
5) ibidem prop. 87.

quidem minime se sperasse confitetur, ut in numeros, quo dicimus, figuratos incurreret, quorum itidem tabulam for mavit.[1]) Hujusmodi autem seriebus consideratis, quas ve auctas vel diminutas proprie nominandas esse vult, in se quentibus propositionibus eas perscrutari pergit, quae ir illarum ratione duplicata, triplicata aut ultra multiplicat procedant, in quibus omnibus res pariter atque in praece dentibus plane quidem ex voto et supra etiam spem suc cessit. Verum ubi de seriebus aliis, quae sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicata, subtripli cata etc., proxime agendum erat, id quod circuli, ellipsis et hyperbolae quadraturam directe quidem et quasi imme diate spectabat, et quae sola ei jam superfuisse videtur difficultas, illic aquam haerere videbat neque ita facile ac in prioribus se extricare posse.[2]) Re enim variis modis tentata neque eo tamen exitu, qui votis omnino satisfaceret numerorum aliquot progressiones[3]) invenit, inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quae sitam circuli saltem quadraturam exhibentem valeret expri mere. — Nam ob ejus dimensionem se praecipue totam hanc inquisitionem suscepisse ipse palam profitetur;[4]) id quod ad hanc nostram, de qua agimus, sententiam compro bandam argumentum est maximum. Perspexit autem illas progressiones tales esse, ut neque arithmeticae dici possent in quibus augmenta continua sint aequalia, neque geome tricae, ubi numeri continue multiplicantes aequales sint, sed tales, quae continuos multiplicatores haberent arithme tice proportionales, ideoque magis etiam compositae essent quam geometricae. Jam vero inde, quod jam in geome trica progressione persaepe accidat, ut interponendi illius termini medii non explicabiles sint numeris expletis multo minus id sperandum esse judicavit in progressione magis etiam composita, sicque in illa, quam jam pri dem conceperat, opinione confirmatior factus tandem eo de-

1) Arith. inf. prop. 108—132.
2) ibidem prop. 189 et schol.
3) ibidem prop. 166 et 168 sqq.
4) In Dedicatione hujus libri.

venit, ut rationem istam quaesitam ejusmodi esse crederet, quae nec veris numeris nec quidem radicibus expletis exhiberi posset, sed singulari quadam notatione designandum.[1])

Quo facto demum peractoque nova quidem artificiosaque via, quam tamen hic adumbrare non locus est, intercalandi negotio,[2]) quod omnino, quantum scio, primus tetigit, diametri quadratum ita definivit, ut circuli spatio pro unitate assumto ipsum minus quidem, quam

$$\frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13 \ldots\ldots}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14 \ldots\ldots} \cdot \sqrt{1\tfrac{1}{13}},$$

sed majus tamen, quam[3])

$$\frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13 \ldots\ldots}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12\ 14 \ldots\ldots} \sqrt{1\tfrac{1}{14}},$$

esse statueret, quas formulas ex lege ipsarum intuitu jam manifesta, quousque libuerit, continuare licet, donec tandem eo perveniatur, ut majoris et minoris differentia quavis assignata minor evadat. Atque paulo post ipsum circulum inter atque diametri quadratum hanc intercedere rationem ait: „Circulus, inquit, ita se habet ad diametri quadratum, „ut 1 ad fractionem illam in infinitum continuandam:

$$\frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13.\ 15.\ 15.\ 17 \ldots\ldots}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14.\ 14.\ 16.\ 16 \ldots\ldots} \text{ in inf.},$$

„vel (ut ipsius verbis uti pergam) si id magis placeat: ut „est istius fractionis denominator ad numeratorem, sic esse „dicimus circulum ad diametri quadratum: et ut numerator „ille ad denominatorem, sic quadratum illud ad circulum.“[4])

Jam vero constat fractionem hanc in infinitum continuatam, quam quidem Wallisius nota □[5]) insignivit, aequalem esse seriei infinitae, qua quattuor (4) numerus exhibētur divisus per illum, qui circuli ambitum dimidium, posito ipsius radio $= 1$, repraesentat hodieque omnium mathematicorum consensu littera graeca $\pi$ significatur; quam ob rem fractione quidem Wallisiana retenta, sed pro ejus

1) Arith. inf. prop. 190.
2) Ibidem prop. 170—191.
3) Ibidem prop. 191.
4) In eadem propositione.
5) Ibidem prop. 167.

significatione nostra, quippe quae jam usitatior sit, substituta ponamus; $\frac{4}{\pi} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9 \ldots\ldots}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10 \ldots\ldots}$,
vel, quod magis arridet:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12.\ 12.\ 14 \ldots\ldots}{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ 11.\ 11.\ 13.\ 13 \ldots\ldots} \text{ in infinitum.}$$

Qua proposita formula demonstrataque Wallisius, quippe quum ad eum, quem sibi proposuisset, exitum rem perduxisset, libro illi rerum magni aestimandarum fertilissimo finem constituit, sufficere sibi fatus novam ingresso semitam eandem aliis aperuisse.[1]) At non tam semita illa, quam ingressus fuerat, plane nova erat atque incognita, quam potius ea, quae eâdem ipsi peracta esse atque detecta novimus. Namque ut taceam, quae in figurarum et planarum et solidarum dimensione pariter atque in mechanicis rebus praestiterit, ipsis iis adhibitis, quae serierum infinitarum consideratione elucubraverat, in quibus profecto multa erant nova, aliis nec inventa nec cogitata quidem; — de ipsis seriebus infinitis quid quantumque, quod ante eum nemo, quod sciam, aggressus est, nedum assecutus, in lucem protulerit, quis est, quin perlecto libro, de quo modo dictum est, perspiciat? An dubitas eum principem statuere, qui ad earum interiora penetraverit et accuratiore eas ac diligentiore meditatione dignatus sit? Quin suo jure mihi quidem intercessisse videtur, quum certior factus, in Actis Eruditorum Lipsiensibus Nicolaum Mercatorem, de quo infra sermo erit, primum laudari, qui quadraturam aliquam, cogita hyperbolae, dedisset per seriem infinitam, in epistola quadam ad Leibnitium data ad pravam sententiam illam refutandam sibique justam hanc gloriam vindicandam ita intonaret: „Ubi dicitur, inquit, Nicolaum Mercatorem primum „esse, qui quadraturam aliquam dedit per seriem infinitam: „vide, an non mea talis arith. inf. prop. 191:

$$\square = \frac{3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 . 9 .\ 9 \ldots\ldots}{2 . 4 . 4 . 6 . 6 . 8 . 8 . 10 \ldots\ldots}.$$

„Sed et omnes mearum tabellarum series in Arithmetica infi-

1) Arith. inf. prop. 194 schol. sub calcem.

„nitorum sunt series infinitae, et earum plurimae, qualesquae „vobis dicuntur (novo nomine) series transcendentes. Nam „quas ego vocaveram continuas approximationes, vocat Jacobus Gregorius series convergentes, et Neutonus series infinitas; sed res eadem est.“[1]) Quibus verbis ipse, quale exspectaverit, judicium fert de libro suo praeclarissimo, quo composito totius serierum infinitarum doctrinae non solum initia posuit atque fundamenta, sed etiam stabilivit eam et ad majorem perfectionis gradum assequendum idoneam reddidit. Quod fortasse in eo reprehendendum, id solum est, quod ubique fere inductione usus est; quae quum minus demonstrativa esse videatur, factum est, ut Ismaelis Bullialdus per maximas ambages more veterum geometrarum hoc arithmeticorum genus in novo opere Arithmeticam infinitorum Wallisianam libris 6 comprehendente demonstraret.[2]) Quod autem ad nostrum argumentum vel maxime spectat, est, quod, ut jam supra alicubi monuimus, auctor ipse in dedicatione illius libri professus est, nulla alia re magis se commotum esse ad hanc totam serierum infinitarum perscrutationem, quam ut circuli quadraturam evinceret. Ibi enim „Huic, inquit, inquisitioni anni 1651 fine me „applicui opinatus, vel inde constare aliquando posse, quomodo quadrandus esset circulus, vel forte ne quidem „quadrandum esse, vel saltem aliquid hinc emersurum „esse, quod operae esset pretium.“

(Cf. Montucla: hist. des math. Tom. II. pag. 348 et Tom. III. pag. 301.)

## §. 5.

Expositae seriei illi fractionis infinitae forma indutae Wallisius etiam aliam eodem spectantem subjunxit, quam a nobilissimo viro et acutissimo simul geometra Guilelmo Vicecomite et Barone Brunckero se accepisse dicit.[1]) Huic

1) Commercium epistolicum Londini 1725 editum, Nro. LXXV pag. 214, NB. Scripta est haec epistola d. 6. mens. Apr. 1697.

2) Cf. Christ. Wolfii Elementa matheseos universae, Tom. V. pag. 57.

3) Arith. inf. prop. 191.

enim aliquot progressionum suarum quum proposuisset et, qua lege procederent, commonstrasset, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam □ commode designandam putaret, sibi indicaret, virum illum spectatissimnm rescripsisse, ipsum re apud se perpensa ratione quadam itidem ex infinitorum calculo profecta sibique peculiari ad hanc quantitatis illius formam pervenisse, quam simul commodissimam censeret:

$$\square = \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Quae formula juxta legem perspicuam in infinitum produci posset, ita tamen, ut, ubicunque tandem placuisset consistere, pro ultimo numero 2 ponendus esset horum aliquis: 3, 5, 7, 9, etc., prout locus, ubi sisteretúr, postulasset, id est in primo loco 3 pro 2, in secundo 5, in tertío 7, et sic deinceps ponendum numeri, qui locum denominaret, semper duplum unitaté auctum. Atque hoc pactó, si in fractionis loco impari sisteretur, prodire numerum justo majorem, sin pari, justo minorem; quo longius autem procederetur, eo propius utrimque ad numerum justum accedi. Quibus praeceptis legibusque servatis nimirum hae inaequalitates inveniuntur magis magisque diminutae:

$$\text{I. } \frac{4}{\pi} > 1; \quad \text{III. } \frac{4}{\pi} > 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{5}}; \quad \text{V. } \frac{4}{\pi} > 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{9}}}}; \text{ etc.}$$

$$\text{II. } \frac{4}{\pi} < 1\tfrac{1}{3}; \quad \text{IV. } \frac{4}{\pi} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{7}}}; \quad \text{VI. } \frac{4}{\pi} < 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{11}}}}}$$

Ac revera fractio quinta huic $\frac{1680}{1321}$ aequalis est, sexta vero huic $\frac{18895}{14836}$; unde sequitur $\frac{4}{\pi} > \frac{1680}{1321}$ et $\frac{4}{\pi} < \frac{18895}{14836}$ id est: $\pi < 3{,}145\ldots\ldots$ et $\pi > 3{,}140\ldots\ldots$

Notandum vero est, hanc primam esse omnium id genus formularum, quae ab ill. Eulero demum integro fere saeculo post, quam haec Brounkeriana in lucem prodiit, acuratius inquisitae sunt certaque sua ac propria „fractionum continuarum" appellatione notatae;[1]) neque saltem Brunckerus neque Wallisius eâdem usus est unquam. Hinc igitur continuarum fractionum inventionem clarissimo Brounckero adscribendam esse apparet, sicuti decimalium, quae non minus, quam continuae, seriebus infinitis adnumerandae sunt, Regiomontanus, plerumque Joannes de Regio-Monte dictus, est auctor praecipuus.[2]) Is enim canonem sinuum condidit novum, in quo radio pro unitate assumto eoque in fractiones decimales diviso, quum antea idem in 60 scrupula divideretur, primus fractiones sexagenarias cum decimalibus commutavit, quum praestare has intelligeret in calculo majoremque commoditatem praebere ad exprimendos numeros prope veros. Sed ut ad propositum nostrum redeamus, rationem ac viam, qua in fractionem illam deductus sit, Brounckerus nunquam ipse apperuit; quare Wallisius, qui diu id frustra speraverat, rem illam ad ipsius mentem explicare conatus est, sed demonstratione tamen addita,[3]) quae haud scio an cuiquam facile intelligatur, quin ipsius et stilum et argumentandi rationem admodum familiarem sibi reddiderit, — quin immo, si Euleri de eâdem judicium sequamur, non modo non sufficiat, sed etiam abs genuina inventoris via plane aliena sit.[4]) Quam tamen rem, quum omnino dubia sit atque incerta, ut ineptum foret,

---

1) Vide Comment. Petrop. vet. T. IX, et Montucla: hist. des math. Tom. III. pag. 308 et 206.

2) Cf. Montucla: Hist. des math. Tom. I. pag. 544; Kaestners Gesch. der Math. Göttingen 1796. Bd. I. S. 550; — Klügelii lexic. math. sub voce „Decimalrechnung," Th. I. S. 717.

3) Arith. inf. l. l.

4) Comm. Petrop. T. IX. pag. 101.

plura de ea in cassum disputare, plane in medio relinquimus ad alia festinantes ab eodem viro excellentissimo in apricum producta, quae, quum magis ad hanc nostram quaestionem faciant, majoris quoque momenti esse videntur. Extant enim praeter illam fractionem continuam etiam plures aliae series infinitae, quas idem Brounckerus in definiendo hyperbolae spatio, praesertim eo, quod ipsius ramos inter atque lineas, quas vocare consueti sumus, asymptotas situm est, enodavit; quibusque in perstringendis quo dilucidior oratio sit magisque perspicua, placet figuram adhibere eandem, quam auctor ipse proposuit. Sit igitur A E Z (Fig. 1.) ramus hyperbolae aequilaterae, cujus vertex A, centrum autem C, semiaxis CA, et asymptotarum una CX, in quam ex ipsius rami punctis A et E ad perpendiculum directae sint lineae AB et ED. Quae quum asymptotarum alteri sint parallelae, sequitur, ut sit: $CD:CB = AB:ED$; atque inde, quod linea CA angulum inter asymptotas contentum in duas partes aequales dividit, intelligitur $AB = CB$. Jam vero solum id agitur, ut spatium illud hyperbolicum ABDEHA per seriem aliquam, nimirum infinitam, exhibeatur ratione quadrati $(AB)^2$ sive $(CB)^2$ habita. Quem ad finem ducatur EF ipsi BD parallela, quo facto parallelogrammum BDEF primus seriei istius quaesitae terminus erit. Deinde vero dimidiata linea BD in puncto G et erecta ad perpendiculum GH, invenitur $CG:CB = AB:GH$, qua ex proportione, cognitis CG ex antecedentibus et $CB = AB$, ipsa quoque GH innotescit. Ducta igitur per H punctum HK ipsi BG parallela, parallelogrammum HKFL secundus seriei illius terminus erit. Eodem modo, quo in triangulo rectangulo hyperbolico AFE, deinceps jam in utroque triangulo AKH et HLE, lineis itidem parallelis et ex lege supra indicata ductis parallelogramma determinentur, quorum unum seriei quaesitae terminum tertium, quartum alterum efficiet. Hoc autem peracto in spatio hyperbolico ABDEA jam quattuor triangula supersunt, in quibus si denuo iterato eodem negotio parallelogramma definiveris justa, quintum seriei, sextum, septimum et octavum ter-

minum habebis; unde jam vides licere hac ratione, quousque placuerit, pergere et quotcunque seriei infinitae terminos obtineri. Pari modo ducta AM ipsi BD parallela et producta DE, usque dum illi occurrat, pro spatio AMEHA seriem infinitam invenire datum est, neque secus res se habet, si de segmento AHEA quaeratur. Ductis enim chordis arcuum AH et HE, quantitates ad triangulum rectilineum AHE definiendum necessariae cognitae habentur ideoque ipsa ejus magnitudo non latet; tum vero in utroque quod restat, segmento, altero ad arcum AH, ad HE altero pertinente, eadem operatio iteranda erit atque antea in segmento AEHA; et sic deinceps, quousque libitum fuerit, pergendum. — Jam praemissa hac geometrica expositione videamus ipsae quae qualesve sint series illae infinitae, quas vir ille nobilissimus huc facientes in medium protulerit. Is autem uno tantum, quo rem illustraret, exemplo allato, quod quidem ita sibi elegit, ut poneret $AB:ED=1:\frac{1}{2}$, vel $CB:CD=1:2$, invenit esse (respice figuram!)

$$\text{spatium ABDEHA} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + \dots\dots\dots;$$

$$\text{— AMEHA} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + \dots\dots\dots; \text{ et}$$

$$\text{— AEHA} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + \dots\dots\dots;$$ [1])

quarum serierum alteram Montucla historicus perillustris ad spatium hyperbolicum AHEF referendam esse per errorem sibi persuasit.[2]) Ceterum etiam omnino non potest negari, quae apud illum de hac Brounckeriana dimetiendi via legantur, manca esse atque inchoata, ut vix inde comprehendere eam ex omni parte concessum sit; quin immo, si non id etiam annotasset, eâdem hac via Brounckerum etiam logarithmum numeri 10 per calculum exarasse, facile in opinionem adduci posses, qua false crederes, ipsam in hanc solam rationem $AB:ED=1:\frac{1}{2}$ cadere. Quam in vitu-

1) Philosophical Transactions in annum 1668 Nr. 34.
2) Hist. des math. Tom. II pag. 355.

perationem qualemcunque ne forte incurram et ipse, etiam formulas illas hic apponam, quibus parallelogramma ista triangulaque determinanda ipsos serierum quaesitarum terminos constituentia facillime in numeris obtineantur, quas tamen ipse Brounckerus non exhibuit. Ponamus igitur MNP (Fig. 2.) arcum esse hyperbolae alicujus aequilaterae, cujus centrum situm in C; CF unam esse asymptotarum; CD et DM perinde ac CF et FP respondentes sibi lineas coordinatas; dimidiatam deinde DF in E et erectam item ordinatam EN; ac denique per P et N puncta rectas PG et NK ipsi DF parallelas esse ductas. Quo facto sumatur $CD = m$ et $DF = n$, unde emergit $MD = \frac{1}{m}$, $PF = \frac{1}{m+n}$ atque hinc, quod $CE:CD = MD:NE$, sive $NE = \frac{CD.DM}{CE}$ et $CE = m + \frac{n}{2}$ est, pro litteris magnis parvis legitimis substitutis prodit $NE = \frac{2}{2m+n}$, et pari modo habetur $NH = \frac{2}{2m+n} - \frac{1}{m+n} = \frac{n}{(2m+n)(m+n)}$; itaque parallelogrammum $NHGK = NH.HG = NH.DE = \frac{n^2}{2(2m+n)(m+n)}$. — Jam ducatur chorda MP, cui ipsa NE producta in L puncto occurrat; erit $HL = \frac{1}{2}MG = \frac{1}{2}(MD - PF) = \frac{n}{2m(m+n)}$, et quum $NH = \frac{n}{(2m+n)(m+n)}$ supra inventum sit, $NL = HL - HN = \frac{n^2}{2m(2m+n)(m+n)}$. Est autem triangulum $NLP = \frac{1}{2}NL.PH$, id est $\triangle NLP = \frac{n^3}{8m(2m+n)(m+n)}$, et quum $\triangle NLM = \triangle NLP$, sequitur $\triangle MNP = \frac{n^3}{4m(2m+n)(m+n)}$. Sumto autem $n = \frac{1}{p}$ et $m = \frac{q}{p}$, habetur tandem parallelogrammum $NHGK = \frac{1}{(2q+1)(2q+2)}$, et triangulum $MNP = \frac{1}{2q(2q+1)(2q+2)}$. Quibus formulis propositis jam non difficile est ad earum

sensum conformare series illas, et quantumusque libuerit continuare. Tandem vero, priusquam ab hoc viro perinsigni ad alium quem procedat oratio, nobis commonendum esse videtur etiam, quas ille eruerit, series infinitas ad circuli et hyperbolae quadraturam referri ideoque novum sententiae, quam proposuimus, comprobandae argumentum suppeditare!

## §. 6.

Quo Brounckerus suam hyperbolae dimensionem serierum infinitarum ope praestitam publici juris fecit, eodem tempore[1]) Nicolaus Mercator libellum edidit „Logarithmotechnia" inscriptum, in quo, ut jam ex titulo conjicere licet, qua ratione, qui plerumque dicuntur, hyperbolici logarithmi commode calculoque minus implicato obtinerentur, docuit; qui quoniam cum ipso hyperbolae aequilaterae spatio arctissime cohaerent, occasione hac et data simul et arrepta etiam pro illo seriem aliquam infinitam exhibuit auctor perillustris. Constat enim inter omnes, si Az hyperbolae aequilaterae ramum esse animo fingas, in quo E et A punctis respondeant CD et CB lineae in ipsa CX asymptota abscissae, DE vero et BA ordinatae, ponasque porro abscissam ejus puncti, in quo vertex hyperbolae situs, CB=1, ipsam aream ABDE logarithmum esse hyperbolicum lineae CD. Ipsa autem series illa, de qua diximus, haec est:

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6} + \frac{a^7}{7} - \frac{a^8}{8} + \ldots\ldots\ldots,$$

eadem videlicet ac prima ex Brounckerianis posito a=1 et singulis binis terminis in unum conjunctis. At ratio tamen, qua Mercator eam invenit, longe alia est et plane diversa ab illa, qua Brounckerum usum esse novimus. Duo enim probe animadvertenda sunt, quibus quasi principiis fundata est Mercatoriana quibusque Wallisium eum secutum esse luculenter demonstratur. — Primum enim quod attinet, Wallisius in opere suo arithmetico anno 1657 pu-

1) Anno 1668.

blicato c. 33. prop. 69 viam monstraverat evolvendi fractionem aliquam per perpetuam divisionem in seriem infinitam allato exemplo:

$$\frac{A}{1-R} = A + AR + AR^2 + AR^3 + AR^4 + \dots\dots\dots ;$$

id quod observans Mercator primum fractionem $\frac{1}{1+a}$, quippe quae ordinatam quamvis y exhibeat, cui abscissa $(1+a)$ in asymptota inde a centro sumta respondeat, per divisionem perpetuam in seriem infinitam reduxit hanc: $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + \dots\dots\dots ;$[1]) — Deinde vero proposito hoc demonstratoque thereмate:

„Quovis numero in partes aequales innumeras discerpto summa quarumvis potestatum ab innumeris istis numeris genitarum extabit, si numeri dati potestas proxime superior potestatibus quaesitis per exponentem suum dividatur;"[2]) eodem ad eruendas singulorum omnium seriem illam infinitam constituentium terminorum vel potius earum, qui ipsis respondeant, ejusmodi potestatum summas usus est. Etenim in uno quoque termino quantitate a pro numero accepta, qui in partes aequales innumeras divisus sit, pro ejus potestate omnium illarum ab innumeris istis aequalibus numeris vel partibus genitarum summam ponit ex propositi theorematis lege inventam, veluti pro $a^2$ summam omnium, quae illuc spectant, potestatum, id est $\frac{a^3}{3}$. Potestates autem ab innumerabilibus illis partibus aequalibus genitas producta dicit ex singulis seorsum innumeris ipso a minoribus numeris in unam ejusdem a partem infinitesimam ductis, hoc est: si exemplis rem illustremus numerumque illum (quasi quemlibet) a discerptatum esse ponamus in partes innumeras aequales, quarum quaeque nimirum $\frac{a}{\infty}$, erunt singuli hujus seriei:

$\frac{a}{\infty}\left(\frac{a}{\infty} + \frac{2a}{\infty} + \frac{3a}{\infty} + \frac{4a}{\infty} + \dots\dots + \frac{\infty a}{\infty}\right)$ termini istius-

1) Logarithmotechnia prop. 15.
2) Ibidem prop. 16.

modi primae potestates earumque summa:
$\Sigma = \frac{a^2}{\infty^2} \cdot \infty \frac{(\infty + 1)}{2} = \frac{a^2}{2}$. Potestates vero, quarum cuique index $= o$, hujus seriei terminis repraesentabuntur:
$\frac{a}{\infty}\left(\frac{a^0}{\infty^0} + \frac{2^0 a^0}{\infty^0} + \frac{3^0 a^0}{\infty^0} + \ldots + \frac{\infty^0 a^0}{\infty^0}\right)$, id est:
$\frac{a}{\infty}(1+1+1+1+1+1+\ldots\ldots$ in inf.), quorum summa
$\Sigma = \frac{a}{\infty} \cdot \infty = a$. Similiter ejusdem generis secundae potestates hae erunt:
$\frac{a}{\infty}\left(\frac{a^2}{\infty^2} + \frac{2^2 a^2}{\infty^2} + \frac{3^2 a^2}{\infty^2} + \ldots\ldots + \frac{\infty^2 a^2}{\infty^2}\right)$, id est:
$\frac{a^3}{\infty^3}(1+4+9+16+25+\ldots + \infty^2)$, quarum summa
$\Sigma = \frac{a^3}{\infty^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \infty(\infty+1)(2\infty+1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{\infty^3}{\infty^3} \cdot a^3 = \frac{a^3}{3}$
ac pari modo reliquarum omnium potestatum summae utpote singuli nobis supra propositae seriei infinitae Mercatorianae termini inveniuntur. At non ita Mercator theorema illud perspicuum reddidit, sed demonstrato primum eodem in quibusdam numerorum potestatibus et quidem inductionis ope statim ad geometricam explicationem sese convertit, ita quidem, ut asymptota, id est ipsa linea abscissa inde ab eo puncto, quod vertici hyperbolae respondeat, in partes innumeras aequales divisa ad earum unamquamque pertinentem proponat ordinatam itidem in seriem infinitam reductam; quo facto quum illas adeo minutas esse supponat, ut ad obtinendam aream, veluti B i r u, (Fig. 3) ubi abscissa $ir = a$ in tres tantummodo ejusmodi partes: $ip = pq = qr = \alpha$ discerpta esse accipitur, has ipsas minutissimis illis (abscissis) $1+\alpha$, $1+2\alpha$, $1+3\alpha$ respondentes (ordinatas) colligi oporteat, sibi nec non aliis persuadet, in serie ista aream B i r u exhibente et ex tribus illis, quibus tres modo indicatae repraesententur ordinatae, conflata primum terminum ipsum numerum esse partiuncularum, in quas abscissa sit dispertita, dum reliqui omnes summae sint potestatum supra descriptarum. Transit autem hic partiuncularum numerus, simulatque infinitus fuerit, in ea-

rundem infinite parvarum summam quia certo numero deficiente mensura tantum valet. —

Jam igitur, quae hactenus dicta sunt, omnia circa theorema supra propositum versantur; quo quidem quid aliud, quaero, nisi cujusvis differentialis integratio docetur? An dubitas, quin haec quadrandi via cum integrali calculo congruat? Equidem sane habeo, quod cum Klügelio consentiam, qui in lexico suo mathematico[1]) Mercatorem seriem magis commodam (sc. quam Brounckerianam) invenisse spatium hyperbolicum ramos inter atque asymptotas situm exhibentem refert, eandem, quae calculo integrali recta via obtineatur. Et ex epistola quadam ab Isaaco Barrowio ad J. Collinsium anno 1669 data[2]) patet, hanc Mercatorianam hyperbolae quadrandae rationem non differre ab illa, quam Neutonus aliquanto post quum in ejusdem hyperbolae dimensione, tum omnino in quadrandis figuris curvilineis adhibebat, nisi in eo, quod haec illa longe generalior fuerit. Namque in epistola illa Barrowius certiorem facit Collinsium, „ab amico quodam, cogita Neutono, „se chartas quasdam[3]) accepisse, in quibus magnitudinum „dimensiones supputandi methodos Mercatoris methodo „pro hyperbola similes, maxime vero generales descripsis„set.“ Jam vero hanc Neutonianam methodum aliam non esse, nisi differentialium integrationem satis vel inde constat, quod ipse statim ab initio opusculi sui, cui indicem fecit: „de analysi per aequationes numero terminorum in„finitas“ id indicavit hisce quidem verbis:

$$\text{„Si } aX^{\frac{m}{n}} = y, \text{ erit } \frac{an}{m+n} X^{\frac{m+n}{n}} = \text{areae,“}^{4)}$$

ejus scilicet, quae arcu vel linea curva quaçunque et rectis contineatur, quarum altera est abscissa x, ordinata al-

1) Sub voce „Geometrie“ pars II. pag. 333.

2) Commerc. epist. Londini anno 1725 iterum impress Nr I. pag. 65.

3) Puta opusculum paulo post commemoratum!

4) Neutoni Opuscula Lausannae et Genevae an. 1744 edita. Tom I, opusc. I p. 3; et commerc. epist. Nr. II. pag. 67.

tera. Quid? Ipsa Neutoniana series pro hyperbolae spatio sola integrationis ope enodata haec:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \dots\dots\dots;$$ vel si $a = b = 1$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots,$$ nonne eadem est, ac Mercatoriana? At Neutonus quoque seriem hanc ita enucleavit, primum ut fractionem $\frac{a^2}{b+x}$, quae est ipsius ordinatae y valor elicitus ex aequatione hyperbolae, sumtis nimirum in asymptotarum una alterave abscissis, per divisionem in seriem infinitam evolveret, et deinde pro

$$\int\left(\frac{a^2}{b+x}\right)dx = \int y\,dx$$ inquireret hoc:

$$\int\left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \dots\dots\dots\right)dx,$$ unde series illa provenit.[1]) — Quae quum ita sint, quaeritur, quî Mercator ad proponendum illud theorema pervenerit? Etiamne in hoc ei Wallisius dux fuerit? Fuit, inquam, profecto! Namque legimus in illius Arithmetica infinitorum prop. 64 hoc therema:

„Si intelligatur series infinita quantitatum a puncto „seu 0 inchoatarum et continue crescentium pro ratione „cujuscunque potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus „compositae; erit totius ratio ad seriem totidem maximae „aequalium ea, quae est unitatis ad indicem istius potesta„tis unitate auctum;"

Quod mea quidem sententia cum illo Mercatoriano arctissime cohaeret. Nam idem etiam valet vigetque in comparandis Mercatorianis seriebus infinitis vel potius earundem summis, quoniam in iis quoque exempli gratia series haec: $\Sigma = \frac{a}{\infty}\left(\frac{a}{\infty} + \frac{2a}{\infty} + \frac{3a}{\infty} + \dots + \frac{\infty a}{\infty}\right)$, quam Wallisii verbis usi seriem primanorum appellare possumus ad seriem totidem maximo termino $\frac{\infty a}{\infty} = a$ aequalium,

1) Neut. Op., Tom I p. 7; et comm. epist. Nr. IX. p. 71—72

ut 1 ad 2 est, vel $\Sigma : \Sigma' = 1 : 2$, quia $\Sigma = \frac{a^2}{2}$ et $\Sigma' = a^2$ invenitur; Pari modo habetur:

$\Sigma = \frac{a}{\infty}\left(\frac{a^2}{\infty^2} + \frac{2^2a^2}{\infty^2} + \frac{3^2a^2}{\infty^2} + \ldots\ldots \frac{\infty^2a^2}{\infty^2}\right)$, id est in secundanis, ad $\Sigma' = \frac{a}{\infty}\left(\frac{\infty^2a^2}{\infty^2} + \frac{\infty^2a^2}{\infty^2} + \ldots \text{in inf.}\right)$ ut 1 ad 3, quia $\Sigma = \frac{a^3}{3}$ et $\Sigma' = a^3$ intelligitur; — neque secus est in ceteris omnibus qualibuscunque hujusmodi potestatibus, Verum tamem discrepantia quaedam inter duo illa theoremata observatur in eo quidem posita, quod Wallisius, quippe qui non veras serierum expletaspue summas inquirat, sed earum tantum rationes ad summas totidem maximo termino aequalium, ipsas augmento finito (sc. unitate) in infinitum crescere supponit, qua quidem sola conditione rationes ei propositae stare possint; Mercator autem, cui de ipsis serierum summis agatur, incrementum infinite parvum statuit, quod ante eum neminem fecisse constat, sicque itidem infinitas quidem series obtinet, quarum tamen termini neque certum aliquem limitem transgrediantur et in unam ipsius hujus limitis in prima potestate sumti partem infinitesimam ducti sint. — Reliqua puidem perspicua sunt; sed quid sibi vult, quod unumquemque seriei terminum in partem aliquam infinitesimam ductum esse accipiat? Nimirum id quoque elucescit, simulatque geometrice rem examines ac vel ad ipsam Cavallerianam vel ad Wallisianam saltem cogitandi rationem respicias; qui substitutis pro suarum serierum infinitarum numeris iisdem respondentibus lineis parallelis eandem rationem, quam series infinita numerorum naturalium haberet ad summam totidem maximo in ea termino aequalium, scilicet 1 : 2, etiam triangulum inter atque parallelogrammum eandem cum illo basin et altitudinem habens intercedere ostendebant. – Quo quidem ratiocinio nonne jam ipsimet a sua serierum infinitarum consummatione ad Mercatorianam transeunt? Substituunt enim pro serie, cujus termini a nihilo incipientes continuo quantitate finita in infinitum

crescant, aliam ita comparatam, ut termini ejus item a nihilo quidem inchoati, sed quantitate tamen infinite parva continuo augeantur, usque dum certum aliquem limitem, id est ipsum numerum exaequent, qui latus sive basin utriusque figurae communem repraesentet. Harum autem figurarum veram magnitudinem omnibusque numeris absolutam si voluissent inquirere, profecto Wallisius saltem, qui pro lineis istis jam parallelogramma ponere mallebat, quorum singulorum altitudo $\frac{1}{\infty}$ totius altitudinis figurae esset, numeros illos innumerabiles seriem posterioris generis infinitam constituentes perinde ac Mercator in partem basis infinitesimam duxisset et hoc demum facto eorum summam utpote figurae magnitudinem exhibuisset. Nam si ponamus $y = x$ aequationem esse ad lineam AL, (Fig. 5), quae cum abscissa AM angulum semirectum faciat; triangulum APQ, in quo $AQ = x = PQ = y$, summa erit omnium parallelogrammatum et tenuissimorum et infinite multorum, quae seriei hujus infinitae terminos constituunt:

$$\frac{x}{\infty}\left(\frac{x}{\infty} + \frac{2x}{\infty} + \frac{3x}{\infty} + \frac{4x}{\infty} + \ldots\ldots + x\right) = \frac{x^2}{2},$$ quorum quisque ordinata esse intelligitur ducta in partem abscissae x infinitesimam. — Itaque, siquidem recte rem intellexi, Wallisius ut viam a primo Cavallerio in figurarum geometricarum dimensione monstratam ingressus est ipse, ita Mercatori pariter atque, ut infra latius patebit, Neutono auctor fuit et quasi magister. At quod summum est et de quo potissimum nobis hic agitur, etiam haec Mercatoriana series infinita ad hyperbolae quadraturam refertur!

## §. 7.

Jam qui sequitur mathematicus perinsignis Jacobus Gregorius anno 1667 Paduae libellum edidit „Vera circuli „et hyperbolae quadratura“ inscriptum, in quo potissimum id egit, ut demonstraret, nihil quidem impedire, quominus quantumlibet quispiam vellet ad veram illam ac propriam accederet; integram tamen atque exactam ut exsequeretur fieri non posse. Ipse autem polygonis aequilateris partim inscriptis circulo partim circumscriptis seriem aliquam infi-

nitam extricavit, cujus ope, bis tredecim tantum terminis ad calculum revocatis, pro ipsius ambitu numerum invenit vero adeo propinquum, ut jam ad decimum usque in decimali fractione locum eidem adaequaret.[1]) Verum quod perquam valde doleo, series illa quae qualisque sit, haud satis compertum habeo, quum, licet omni ope atque opera id contenderim, ut librum illum assequerer, tamen non contigerit mihi, ut ad manum eum haberem. Coactum igitur me video, Tuam, benevole lector, implorare veniam, favorem, indulgentiam, qua condonare mihi velis, quod, unde hauriam, vero ac genuino fonte destitutus rivulos consecter, conjectura potius, quam veritate ad liquidum explorata innixus. Est enim profecto, quod ejus vice intuendam tibi hanc proponere non dubitem:

$$\frac{4r^2}{2d-\frac{e}{3}-\frac{e^2}{90d}-\frac{e^3}{756d^2}-\frac{2e^4}{113400d^3}-\frac{260e^5}{7384400d^4}-\text{etc. in inf.}},$$

quam, posito circuli radio = r, dimidio latere quadrati eidem inscripti = d et differentia radium inter atque latus quadrati = e, dimidium ipsius ambitum repraesentare scito, quamque licet non pro certo affirmare possim eandem atque illam supra dictam, tamen Gregorianam esse mihi persuasissimum est. Liquet enim id sole ipso clarius ex fragmento aliquo, excerpto ex epistola Oldenburgii ad Leibnitium data, in quo, quae huc faciunt, verba leguntur haec: „D. Collinsius praemissa salute quae sequuntur re-„mittit: Primo cl. Gregorium in postrema sua ad ill. Hu-„genium responsione seriem suppeditasse ad circumferen-„tiam circuli inveniendam, quae talis:

„.........; hic ipsa series illa posita est; .....,

„quae series adeo produci potest, ut a semicircumferentia mi-„nus differat, quam ulla quantitas assignalibis.“[2]) Itaque et Gregoriana est et ad determinandum circuli ambitum

1) Cf. Klügelii lexic. math. sub voce „Quadratur,“ pars IV. pag. 54.

2) Commerc. epist. Nr. XXXVI pag. 118, et Neutoni Opuscula, Tom I opusc. IX pag. 301.

inventa series illa, unde vix potest dubitari, quin ipsa eadem sit, de qua nobis quaeratur. —

Anno post, quam illum librum evulgavit, Gregorius alium in lucem edidit „Exercitationes geometricae" inscriptum, in quo non modo geometrice demonstravit illam Mercatoris et Brounckeri hyperbolae quadraturam, sed promovit etiam multoque perfectiorem reddidit. Neque enim pro eo tantum spatio hyperbolico, quod ramum inter atque asymptotam situm et ab ipsa inde ordinata incipiens, quae verticis puncto respondet, secundum eundem ramum in infinitum excurrit, seriem infinitam invenit, sed etiam pro illo, quod ab altera ejusdem ordinatae parte centrum versus spectat. Quas inter series duas nimirum id tantum intercedit, quod singuli in earum una termini, quorum dignitas numero impari exprimitur, signis gaudent ipsismet, quae ejusdemmodi in altera terminis praefixa sunt, contrariis. Utramque etiam Klügelius in lexico suo exhibuit et quidem in hac venustiore, quam in qua auctor ipse eas proposuit, forma:

I, $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{8} + \ldots\ldots$, et

II, $-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - \ldots\ldots\ldots$; vel versis in contraria signis: $y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \ldots\ldots\ldots$;[1]) quarum altera etiam ipsi log. hyp. $\left(\frac{1+y}{1}\right)$, altera vero huic log. hyp. $\left(\frac{1}{1-y}\right)$ adaequatur. His autem duabus seriebus inventis jam in promptu erat, adjicere tertiam hanc:

III, $2\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} + \ldots\right) = $ log. hyp.

---

1) Cf. Klügelii lex. math. sub voce „Logarithmus," pars III pag. 553, et Jac. Gregorii Exerc. geom. et ibi quidem: N Mercatoris quadratura hyperboles geometrice demonstrata, prop. IV. pag. 11 et 12.

$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$; quae omnes quum ejusdem generis sint ac formae cum Mercatoriana illa vel Neutoniana supra exposita, quam non convergere constat, simulatque in ea quantitas indefinita unitate major fuerit, annotare hic libet, quomodo Wallisius huic malo mederi conatus sit. Is enim, ut illa y semper fractio esset, rem, nescio quo loco, ita instituit, ut pro area quacunque, veluti pro area DENM (Fig. 2.) inter ordinatas DM et EN contenta, quarum alteri respondeat abscissa CD = b, alteri vero CE = z, seriem inquireret, quam nimirum eandem esse oportebat atque illam pro log. hyp. $\left(\frac{z}{z-b}\right) = \log. z - \log. (z-b)$, vel

$$-l\left(1-\frac{b}{z}\right)=\frac{b}{z}+\frac{b^2}{2z^2}+\frac{b^3}{3z^3}+\frac{b^4}{4z^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ vel}$$

$$l\left(1-\frac{b}{z}\right)=-\frac{b}{z}-\frac{b^2}{2z^2}-\frac{b^3}{3z^3}-\frac{b^4}{4z^4}-\ldots\ldots;$$ unde sequitur: $$l\left(1+\frac{b}{z}\right)=\frac{b}{z}-\frac{b^2}{2z^2}+\frac{b^3}{3z^3}-\frac{b^4}{4z^4}+\ldots\ldots;$$ et denique

$$l\left\{\frac{1+\frac{b}{z}}{1-\frac{b}{z}}\right\}=l\left(\frac{z+b}{z-b}\right)=2\left(\frac{b}{z}+\frac{b^3}{3z^3}+\frac{b^5}{5z^5}+\frac{b^7}{7z^7}+\ldots\ldots\right)$$ [1])

Sed non solum, quas hactenus proposui, ad inveniendum ex dato numero respondentem ipsimet logarithmum idoneas series excogitavit Gregorius, sed etiam, quarum ope vice versa ex dato logarithmo numerus eliciatur legitimus, duas enucleavit alias sine dubio has:

$$\frac{z}{b}+\frac{z^2}{2ab}+\frac{z^3}{6a^2b^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+\frac{z^5}{120a^4b^5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$ et

$$-\frac{z}{b}+\frac{z^2}{2ab}-\frac{z^3}{6a^2b^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}-\frac{z^5}{120a^4b^5}+\ldots\ldots;$$ vel, posito

$$a=b=1, z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^5}{120}+\frac{z^6}{720}+\ldots\ldots\ldots\ldots;$$ et

$$-z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^5}{120}+\frac{z^6}{720}-\frac{z^7}{5040}+\ldots\ldots\ldots;$$

1) Cf. Klügelium l. l.

pronti z logarithmus sit affirmativus vel negativus. Nam eruisse Gregorium ejusmodi series ex ipsius epistola manifestum est, quam ad Collinsium anno 1670 die 19^na^ mens. Decembr. dedit, inque qua: „Quum postremas, inquit, ad „te dedi litteras, nondum animadvertissem D. Neutoni se„riem de circuli zonis, (quam jam dudum ad me misisti) „una cum infinito istiusmodi serierum numero consectarium „illius esse posse, quam misi de logarithmis: nempe „dato logarithmo invenire ejus numerum;“[1]) — Ipsas autem series illas equidem ex Neutoni litteris ad Oldenburgium datis transcripsi, ubi haecce simul apposita sunt: „logarithmo hyperbolico l posito, numerus ei compe„tens erit: $1 + \frac{l}{1} + \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24} + \frac{l^5}{120} + \frac{l^6}{720} + \ldots\ldots\ldots$, si „l sit affirmativus; et: $1 - \frac{l}{1} + \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24} - \ldots\ldots\ldots$, si „l sit negativus.“[2]) —

Jam quae sequuntur reliquae series infinitae ab eodem Gregorio enodatae ex solo epistolarum commercio depromendae sunt, quod ipse cum Collinsio habebat, quoque potissimum excitatae sunt. Neque enim multo post, quam editi sunt libri illi supra nominati (sc. Mercatoris Logarithmotechnia et Exercitationes geometricae Gregorii) a Collinsio[3]) Cantabrigiam missi sunt ad Barrowium, qui observato in iis infinitarum serierum usu ad logarithmos construendos rescripsit methodum illam jam biennio ante excogitatam fuisse a successore suo Neutono omnibusque curvis universim applicatam;[4]) cujus rei ut specimina quaedam exhiberet, in proximis litteris ipsum Neutoni opus manuscriptum Collinsio misit pluribus istiusmodi serierum exemplis refertum.[5]) Hujus autem operis notitiam Collinsius

---

1) Commerc. epist. Nr. XXVIII pag 96.

2) Ibidem Nr. LXI pag. 178 et 179; et Neutoni Opuscula Tom I, opusc. II p. 177, et opusc. X pag. 318.

3) Comm. epist. Nr. XXIV pag. 103; et Nr. XXXVI. p. 118, et Neut. Op. I., op. IX pag. 301.

4) Ibidem Nr. XLVII p. 130; et Nr. I pag. 65.

5) Commerc. epist. Nro. II, pag. 67 sqq.

dedit Gregorio,[1]) qui quum rationem illam, quam Mercator particulariter ad inveniendas hyperbolae areas adhibuerat, ipseque vero adauxerat, jam universalem redditam esse intellexisset, acri studio eandem acquisivit multumque in ea perquirenda desudavit. Verum ut penitus illam perciperet, post integrum demum annuum laborem ei contigit,[2]) et quidem unius ex seriebus Neutonianis ope, quam idem Collinsius ei impertierat,[3]) ipse tamen initio quidem, quum ex suis inter se combinatis[4]) eam deducere[5]) pluries frustra tentasset, intelligere[6]) non poterat. Erat autem series illa haec:

$$2BR - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21\,B^{13}}{6656\,R^{11}} - \text{etc.}$$

quae, si radium circuli R ponas et B sinum arcus, zonam inter diametrum et chordam illi parallelam repraesentat.[7]) Postea vero, quam et seriem illam legitimam esse et ipsam serierum methodum Neutonianam clarius perspexit, id per duas epistolas Collinsio indicavit, quarum in altera[8]) simul hanc unam seriem remisit: „Arcus, inquit, cujus sinus B, aequalis est:

$$B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112\,R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8} + \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

in altera[9]) vero tanquam ipsas, quas ab illo acceperat, series remunerandi causa plures exhibuit, quas quidem hic in conspectuondituro mihi ipsas Gregorii litteras ad verbum transcribere concessum sit. Ibi enim: „Quod attinet, inquit, Neutoni

---

1) Per epistolam datam die 25. mens Novbr. anno 1669, cf. comm. ep. Nr. XIV pag. 95.

2) Anno 1670 exeunte.

3) Comm. ep. Nr. LVII pag. 149.

4) Ibidem Nr. XVIII pag. 97. et XLVII pag. 130, ubi plures se ad manus habere ait series pro circulo mensurando.

5) Ibidem Nr. XVIII.

6) Ibidem Nr. XV p. 95.

7) Ibidem Nr. XV et Nr. XXXVI pag. 119, cf. etiam Neutoni Opusc. Tom. I, opusc. IX pag. 302.

8) Ibidem Nr. XVIII pag. 97.

9) Commerc. epist. Nr. XX pag. 98 et 99.

„methodum universalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi „innotescit. Nihilo tamen minus ob series ad me missas „gratias habeo, quas ut remunerem, mitto, quaesequuntur.

„Sit radius = r, arcus = a, tangens = t, secans = s; et eri[t]

$$„a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}} + \dots\dots;$$

$$„t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \dots\dots; \text{ et}$$

$$„s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{278a^8}{8064r^7} + \dots\dots$$

„Sit nunc tangens artificialis = s et integer qua-„drans = q; erit: $s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9} + \text{etc.}$

„Sit $2a - q = e$, erit: $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8} + \text{etc.}$

„Sit nunc secans artificialis 45° = s, sitque s + l secans ar-„tificialis ad libitum, erit ejus arcus:

$$„\tfrac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{452l^6}{45r^5} + \dots\dots;$$

„eritque $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8} - \dots\dots$

„Hic animadvertendum est, radium artificialem esse 0, „et ubi inveneris q majorem, quam 2a, sive artificialem „secantem 24° majorem esse data secante, mutanda esse „signa, et pergendum secundum vulgaris Algebrae prae-„cepta.“ —

„Sit ellipsis, cujus alter semiaxium = r, alter = c; „ex quolibet curvae ellipticae puncto demittatur in semi-„axim r recta perpendicularis = a; erit curva elliptica „perpendiculari a adjacens:

$$„= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8} + \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7}{112c^{12}}$$
$$+ \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 24c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}} + \dots\dots$$

„Si determinetur ellipseos species, series haec simpli-„cior evadet. Ut si c = 2r, foret curva praedicta:

$$= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{113a^7}{458752r^6} + \frac{3419a^9}{75497472r^8} + \ldots\ldots\ldots.$$

„Reliquis vero manentibus, si curva praedicta esset „hyperbola, praedicta quoque series ei inserviret, si modo „omnium terminorum partes affirmentur, et negentur totus „terminus tertius, totus quintus, totus septimus etc. in lo„cis imparibus.“ —

Quibus seriebus tandem etiam duae adnumerandae sunt hae: dato radio r et sinu verso sive sagitta a, positoque $b^2$ pro 2ra, area segmenti resecti abs chorda erit

$$= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \frac{7a^{11}}{832b^9} - \ldots ;$$ et arcus

integer $= 2b + \frac{a^2}{4b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} + \ldots\ldots ;$

quam utramque Gregorium elucubrasse testis est Oldenburgius, qui in epistola ad Leibnitium data iisdem his seriebus perscriptis haecce apposuit verba: „Duae hae series D. „Gregorio debentur, quas exhibuit ex eo tempore, quo usus „est hac methodo (sc. Neutoniana); quod ab ipso aliquot „post annis factum, postquam scilicet intellexerat D. Neu„tonum generatim eam applicasse.“ 1)

(cf. Montucla: Hist. des math. II. pag. 376).

## §. 8.

Relicto Gregorio tandem ad ipsum, cujus in antecedentibus jam saepius facta est nominatio, Neutonum venimus; quem et ingenio et doctrina meritisque quum de universis litteris artibusque ingenuis, tum praecipue de mathematicis iis omnibus, qui hactenus commemorati sunt, antecedere quis est, quin affirmaverit? Verumenimvero quae supersunt reliqua ejus et cogitata sublimia et inventa praeclara hic praetermittamus, non quasi levioris sint momenti vel minus ad ornandum eum laudibusque efferendum faciant (sunt enim sane et illa ejusmodi, ut jam sola ad commendandum eum immortali gloriae sufficiant); — sed quia ad hanc nostram disquisitionem non pertinent; — ad id unum

1) Commerc. epist. Nr. XXXVI pag. 118.

animum intendamus, quid quantumque vir ille ingeniosissimus mira quadam ac paene incredibili sua cogitandi vi quum ad singulas mathematicorum disciplinas exornandas tum ad universam eorum doctrinam augendam promovendamque contulerit! Nimirum, quod summum quidem est, praedicamus, quin veneramur eum quasi parentem atque patrem ipsius calculi infinitesimalis, quo invento tanquam summo artificio mortalibus divinitus dato mathematici jamjam cuique fere quaestioni satisfacere valerent, qua in resolvenda antea et temporis multum et operae frustra consumsissent. Conjuncta autem arctissime et connexa cum calculi hujus inventione et ea sunt, quae ad confirmandam amplificandamque serierum infinitarum doctrinam in medium protulit, quippe quum, quidquid ad hujus perfectionem addidit apposuitque, ex illo id maximam partem depromeret atque hauriret, ad excolendum vero illum potissimum hanc adhiberet; sic enim utrumque calculi genus in perscrutationibus suis conjunxit, ut unius ope firmum redderet perfectiusque alterum. Imprimis autem id factum ei est in dimensione figurarum curvilinearum, quarum areas constat ab integrali $\int y dx$, arcuum vero longitudines ab $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ pendere, substitutis nimirum pro quantitatibus y et dy ipsarum valoribus legitimis ex aequatione, quae fuerit ad curvam, de qua quaeratur, iisdem elicitis. Atque sicut ad invenienda id genus integralia ei maximo usui erant atque emolumento series infinitae, sic in illis ipsis perquirendis eaedem felicissime exercebantur. Scripta hujus argumenti tria extant, quibus adnumerandae sunt duae ad Oldenburgium datae et cum Leibnitio communicandae epistolae, quarum altera plerumque prior, posterior altera audit.[1]) Illorum autem scriptorum primum est et antiquissimum idem, quod supra[2]) jam diximus ab ipso Neutono primum cum

1) Epistola „prior“ data est anno 1676 die 13. men. Jun.; posterior vero eodem anno d. 24. m. Oct. cf. Commerc. epist. Nr. XLVIII usque ad LI, pag. 131—145, et Nr. LV usque ad LXV pag. 142—190.

2) Pag. 31.

Barrowio communicatum esse, quodque inscriptum est: „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.“ Cujus analysis notitiam Barrowius fecit Collinsio[1]) et Oldenburgio,[2]) qui in litteris ad Slusium[3]) datis eam „universalem methodum analyticam dicit inservientem mensurandis areis omnium ejusmodi curvarum et earundem perimetrorum, in quibus ordinatae eandem habeant communem „habitudinem ad basin, additis his quoque verbis: Haec methodus alia non est ab illa, quam particulariter applicuit „D. Mercator ad inveniendas areas hyperbolae, universalis reddita.“ Ac revera in hoc opusculo solam fere linearum quadraturam videmus pertractatam legimusque in eo id annotatum: „Problemata de curvarum longitudine, de magnitudine et superficie solidorum deque centro gravitatis quum eo tandem reduci possint, ut quaeratur quantitas superficiei planae linea curva terminatae, non opus est quidquam de iis adjungere“[4]) Attamen unum saltem apposuit exemplum, quo longitudo arcus circuli exhibeatur.[5])

Alterum huc pertinens opusculum inscriptum est: „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“[6]); quod auctor initio Kinkhuysenii „introductioni ad analysin speciosam,“ quam ipse auctiorem reddiderat, adjungere volebat, deinde vero consilio mutato cum „tractatu de refractione lucis et coloribus“, quem tum[7]), ut ipsius verbis utar, in promptu habebat, edere constituit; — sed objectiones ab ipsius de luce sententia natae eum deterruerunt.[8]) Idem initium sumit ab reductione fractionum vel quantitatum radicalium vel denique functionum implicitarum (quas quidem Neutonus aequationes affectas appellat) in series infinitas, quo ostenso

---

1) Comm. ep. Nr. I et II pag. 67.
2) Ibidem Nr. XIII. pag. 93.
3) Ibidem loci.
4) Neutoni Opuscula Tom. I, opusc. I pag. 18.
5) Ibidem; seriem huc spectantem infra pag. 48 intueberis.
6) Ibidem Tom. I, opusc. II pag. 31—199.
7) Anno 1671.
8) Commerc. epist. Nr. XXII, XXIII et LVII, pag. 101, 102 et 149.

auctor ad explicandum calculum differentialem transit, quem ipse quidem pro sua rem cogitandi ratione methodum fluxionum dicit. At quaesiveris fortasse, benevole lector, quae fuerit illa cogitandi ratio quaeque via, qua vir ille celebratissimus in calculum hunc inciderit? Quae quidem quaestio quamvis non ad propositum mihi argumentum pertineat, sed quasi subseciva esse videatur, tamen hoc loco non inepta mihique plane rejicienda est; respondeam igitur expetenti tibi quam paucissimis.

Depinxit cogitatione Neutonus omnes quantitates quasi geometricas, quae motu continuo generentur: lineae motu puncti, plana motu lineae, solida motu plani.[1]) Itaque non, ut Cavallerius vel Wallisius saltem, quasi ex partibus quam minimis constantes eas, sed quasi motu continuo descriptas consideravit, neque tanquam per appositionem partium, sed tanquam describendo nascerentur.[2]) Ex longitudine autem descripti spatii quovis temporis puncto data velocitatem motus tempore proposito inveniri posse praecepit, et velocitate motus semper data longitudinem spatii descripti tempore proposito. Sed de voce „tempus" bene distinxit: non considerare se tempus quoad formam nec velle in sequentibus tempus ab aliis subintelligi in sua formali significatione, sed tanquam significans quantitatem illam a tempore diversam (cogita abscissam x), cujus aequabili incremento vel fluxu (sc. dx) tempus exponatur et mensuretur. Quantitates eas, quas tanquam gradatim et indefinite crescentes consideravit, fluentes vocavit, et velocitates, quibus singulae fluentes per motum generantem augerentur, fluxiones. Hujusmodi autem consideratione et quod quantitates aequalibus temporibus crescentes et crescendo genitae pro velocitate majore vel minore, qua crescant ac generentur, evadant majores vel minores, se deductum esse ait ad quaerendam methodum determinandi quantitates ip-

---

1) Cf. Introd., quae tractatui „de quadratura curvarum" praefixa est, Opusc. Tom. I, opusc. III, pag. 203.

2) Ibidem pag. 53 et 54. — Notandum vero est, etiam apud Cavallerium jam fluendi verbum pluries legi, cf. ex. gr. ejusdem Exerc. geom. pag. 17, et exerc. III p. 217, etc.

sas ex velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus gignantur, atque sic paulatim annis 1665 et 1666 in methodum fluxionum incidisse.[1])

Tertio denique hujus argumenti opusculo index est: „Tractatus de quadratura curvarum“,[2]) quod primum Neutonus ipse edidit Londini anno 1704, adjectum quasi appendicem ad suam „Opticen“, quodque nihil aliud est, nisi quorum jam in primo tanquam lineamenta dedit, eorundem expositio pertractatioque uberior, adhibitis jamjam, quae ex calculi infinitesimalis usu ei promanabant, artificiis. —

Ipsam vero quadraturarum methodum suam tribus hisce fundavit regulis. Incipiens, ubi finem fecit Wallisius in Arithmetica sua infinitorum, per libri hujus propositionem LIX et, quae proxime ibi sequuntur, perinde ac Mercator[3]) eo devenit, ut, si abscissa cujusvis curvilinearis figurae vocetur X, n vero et m numeri sint et $X^{\frac{m}{n}}$ ordinatae ad rectos angulos erectae, aream figurae $\frac{n}{m+n} X^{\frac{m+n}{n}}$ esse contenderet, atque hoc assumitur ab ipso tanquam regula prima[4]) Wallisius quidem propositionem hanc demonstravit gradatim per multas particulares propositiones tandemque omnes in unam collegit per tabulam casuum. Neutonus vero omnes casus in unum reduxit per dignitatem cum indefinito indice sicque primus indefinitos dignitatum indices in operationes analyticas introduxit. Dein vero per CVIII propositionem ejusdem libri Wallisiani perque plures alias subsequentes propositiones ita ratiocinatus est: Si ordinata composita fuerit ex duobns vel pluribus terminis cum signis suis + et —; etiam area composita erit ex duabus vel pluribus areis cum signis suis + et —; et haec est regula secunda.[5]) Tertia est[6]), ut, si ordinata fuerit functio quaevis fracta vel irrationalis vel denique implicita,

1) Opuscula, Tom. I, opusc. III pag. 204.
2) Ibidem totum opusc. III pag. 208—244.
3) Cf. supra § 6.
4) Opuscula Tom. I, opusc. I pag. 3.
5) Ibidem pag. 4.
6) Ibidem pag. 6.

reducantur fractiones vel radicales vel affectae radices aequationum in series infinitas, quum quadratura aliter non succedat. Hujusmodi autem reductionum unaquaeque quomodo peragenda esset, in epistola „priore“ ad Oldenburgium data docuit, apposito simul generali theoremate nunc jam omnibus celebratissimo, cujus ope extractiones radicum multum abbrevientur. Illud enim theorema dico, quo quamlibet dignitatem cujusvis binomialis in seriem infinitam reducendi modus ostenditur; quodque cum Leibnitio ab Oldenburgio communicatum ille non statim perspexit ideoque per eundem Oldenburgium rogavit [1] Neutonum, ut fontem ejus aperire explicareque vellet: qui vir candidissimus id facere etiam non gravatus est. Rescripsit enim (et haec est epistola illa „posterior“) Oldenburgio, se paulo ante pestem, quae Londini grassabatur anno 1665, quum legeret Wallisii Arithmeticam infinitorum cogitaretque de intercalanda serie:

$$x,\ x-\tfrac{1}{3}x^3,\ x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5,\ x-\tfrac{3}{3}x^3+\tfrac{3}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7,\ \text{etc.}$$

invenisse, aream circuli esse:

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{6}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}-\ldots\ldots;$$ et

persequendo methodum intercalationis praedictum theorema excogitasse; ejus autem ope se reductionem fractionum et surdarum in series infinitas per divisionem et radicum extractionem invenisse, ac tum demum ad affectarum radicum extractionem perrexisse. Verum mirandum est, quod, si jam anno 1665 ei theorema illud innotuit, eodem tamen nondum usus est in primo nobis commemorato opusculo, quod demum anno 1669 in lucem prodiit! Ibi enim non solum praecipit [2]), radices in litteris eodem modo extrahi, quo Arithmetici in numeris decimalibus eas extrahant, sed etiam ipse sic rem absolvit. Namque ad reducendam hanc fractionem $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ in seriem infinitam mutat eam in illam $\frac{\sqrt{x-x^2}}{2x-2x^2}$, cujus ex numera-

1) Commerc. epist. Nr. LII pag. 146.
2) Opusc. Tom. I, opusc. I pag. 6.

tore extractam radicem denique per denominatorem dividit.[1]) Idem fit in transmutatione fractionis $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-ax^2}}$;[2]) unde elucet eum tum temporis illud theorema non novisse. Sed ut res se habet, nemo tamen est, qui Neutonum idem excogitasse dubitet. Concedendum quidem est, coefficientes illos binomiales jam Stifelio, antiquissimo Germaniae arithmetico, cognitos fuisse, qui eos in „arithmethica sua integra"[3]) consideravit eorumque jam omnes, qui ad quamlibet minorem decima septima dignitatem spectant, exhibuit, numeros eos dicens, qui peculiariter ad suas species extractionum pertinerent. Quod qui testatur Kaestnerus[4]) simul addit, se prius, quam apud Stifelium coefficientes illos non reperisse. Hinc igitur Stifelius primus esse videtur therorematis illius inventor; at videtur quoque, non est. Neque assensione comprobanda est sententia Joannis Bernoullii, qui Klügelio teste[5]) hanc inventionem, nescio quo loco, adscribit Pascalio. Is enim in contemplatione serierum arithmeticarum multum quidem versatus est, quarum tandem tabulam quoque proposuit hanc:[6])

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1. | | | | | | | | |
| I | 1. | 1. | | | | | | | |
| II | 1. | 2. | 1. | | | | | | |
| III | 1. | 3. | 3. | 1. | | | | | |
| IV | 1. | 4. | 6. | 4. | 1. | | | | |
| V | 1. | 5. | 10. | 10. | 5. | 1. | | | |
| VI | 1. | 6. | 15. | 20. | 15. | 6. | 1. | | |
| VII | 1. | 7. | 21. | 35. | 35. | 21. | 7. | 1. | |
| VIII | 1. | 8. | 28. | 56. | 70. | 56. | 28. | 8. | 1. |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | 0 | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII, |

1) Opusc. Tom. 1. opusc. pag. 19.

2) Ibidem pag. 9.

3) Lib. I cap, 5; edita illa primum est anno 1544.

4) Gesch. der Math. Bd. I, S. 120 sqq.

5) In lexico math. sub voce „Binomischer Lehrsatz," pars I pag. 339.

6) Pascalius de tabula hac libellum edidit anno 1665, eodem igitur, quo Neutonus dictum theorema invenit.

quae plerumque triangulum arithmeticum audit; quaque quum etiam coefficientes illi binomiales repraesententur, inde forsan Bernoullius sibi persuasit, Pascalium esse theorematis illius foecundissimi inventorem. Sed errat; errat etiam, quisquis talem esse Briggium vult. Nam et hic, perinde ac Stifelius et Pascalius, eos tantum coefficientes eruere scivit, qui non ad dignitates referantur, nisi quarum indices sint numeri integri. Neutonus vero primus fuit, qui modum docuit quamcunque dignitatem binomialem, id est, cujus exponens numerus sive quantitas est qualiscunque, in seriem infinitam finitamve evolvendi; itaque suo jure theorematis illius praedicatur auctor laudaturque. Cujus autem interest accuratiorem habere notitiam, qua sive cujusmodi contemplatione auctor eo pervenerit, hunc, ne longior sim, ad epistolam illam „posteriorem“ remiserim, in qua sufficientem hujus rei expositionem inveniet. Ipsum autem theorema illud, ut jam dictum est, auctor in epistola „priore“ explicavit apposita generali hac formula:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\cdots\cdots,$$

ubi simul, quid $P+PQ$, $P$, $Q$, et $\frac{m}{n}$ sibi velint, subnectit.

Exemplum vero, quo rem magis illustraret, primum attulit hoc:

$$\sqrt{c^2-x^2}=(c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\cdots\cdots\cdots;$$

cui deinceps alia subjuncta sunt plura. Sub finem autem haec verba leguntur: „Per eandem regulam geneses potestatum, divisiones per potestates aut per quantitates radicales, extractiones radicum altiorum in numeris etiam commode instituuntur.“

His dictis reliquum est, ut ipsae tandem series illae infinitae, quae ex ista curvarum quadratura vel omnino figurarum geometricarum demensione, calculi infinitesimalis ope a Neutono et instituta et peracta, provenerint, in conspectu ponantur; quas tamen omnes huc transcribere propter nimiam earum multitudinem non est concessum. Itaque praeter illas, quas jam in superioribus hinc illinc exhibuimus, intuendas non proponamus, nisi notatu dignissi-

mas, quarum in numero imprimis, quae sequuntur, habemus hasce: Posito circuli radio = 1, arcu = z, sinu = x, cosinu = y, sinuverso = u; erit:

$$z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \ldots\ldots\ldots;$$ [1])

$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 + \ldots\ldots\ldots;$$ [2])

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{24}z^4 - \tfrac{1}{720}z^6 + \tfrac{1}{40320}z^8 - \tfrac{1}{3628800}z^{10} + \ldots\ldots;$$ [3])

$$u = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \frac{z^8}{40320} + \ldots\ldots\ldots;$$ [4])

Porro si et in hyperbola et in circulo coordinatae initium capiant a centro et quidem in illa abscissae (x) in producto axi b sumantur, ita ud ad eam sit aequatio: $a^2 + x^2 = y^2$, ad circulum vero: $a^2 - x^2 = y^2$; erit area quaecunque hyperbolae:

$$A = ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \ldots\ldots;$$ circuli vero: [5])

$$A' = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{4a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} - \ldots;$$ [6]) quibus tandem adnumeranda est series, qua longitudo quadrantalis arcus, cujus chorda accipitur esse unitas, exhibetur, haec:

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} - \ldots\ldots\ldots;$$ [7])

(Cf. Montucla: Hist. des math. II., 365 sqq. et aliis quibusdam locis.)

## §. 9.

Sequitur tandem Leibnitius, quem quoad ingenium doctrinamque si non majorem Neutono, parem certe omnimodo dicere possumus. Fuit enim sane vir summo ingenii acu-

---

1) Neutoni Opuscula, Tom. I, opusc. I pag. 19, et opusc. IX pag. 301.

2) Ibidem opusc. I pag. 22, et opusc. IX pag. 302.

3) Ibidem opusc. I pag. 22.

4) Commerc. epist. Nr. LIX pag. 136.

5) Opusc. Tom. I, opusc. I pag. 8.

6) Ibidem pag. 9.

7) Epistola „posterior," vel Neutoni Opuscula Tom. I, opusc. IX pag. 342.

mine, memoria rerum tenacissima tanta tamque exquisita doctrina, ut ex immensa fere, qua singula adhuc saecula floruerunt, virorum doctorum multitudine vix possit quisquam reperiri cum illo omni ex parte comparandus, ne dicam ei praeferendus. Quid multa? In omnibus fere litterarum artiumque disciplinis eum perquam eruditum fuisse inter omnes constat. At non de scientia ejus in universum nobis quaeritur, sed potius quid quantumque in re mathematica praestiterit, in qua nimirum acutissimum ejus ingenium non minus illuxit, quam in ceteris liberalium artium studiis. Quotus enim quisque est, quin et Leibnitium utpote alterum calculi infinitesimalis inventorem praedicet, veneretur, grata colat memoria? Neque tamen eadem via, qua Neutonus, neque eodem tempore cum illo, sed pluribus annis post in eum deductus est. Etenim quo ille, ut supra vidimus, per disquisitiones geometricas motusque consideratione pervenit, eo Leibnitius differentiarum summarumque in seriebus numeralibus investigatione perductus est:[1]) illum jam anno 1671 methodum suam fluxionum et serierum infinitarum in promtu habuisse edereque[2]) voluisse scimus, hic calculum suum differentialem et integralem vel saltem principia ejus anno 1684 demum publici juris fecit in Actis Lipsiensibus, primis quidem, ut quasi per transennam id annotemus, hujus generis scriptis publicis, quae usu recepta sunt. Quum autem quod sibi proposuerat Neutonus non peregisset, Leibnitius eum in pervulgando hoc calculo antevenit; unde postmodum magna illa omnibus nota inter utrumque suborta est controversia, qua de justa hujus inventionis gloria utrimque acerrime disceptabatur. Neutonus enim insimulans Leibnitium ipsius methodo fluxionum auxiliante calculum differentialem invenisse, sibi soli honorem hunc vindicare nitebatur; — quem tamen utrique deberi jamjam nullum est dubium. Itaque mittamus hanc rem ad ea nos convertentes quae ad excolendam serierum infinitarum doctrinam perti-

1) Cf. Epistolam ejus ad Abbatem Conti, quae Neutoni. Opusculorum Tomo I inserta est, se. opusc. XVI pag. 396 infra.
2) Cf. supra § 8 pag. 43.

nent ab eodem Leibnitio elucubrata, in quibus sibi sine dubio praeivisse Neutonum ipse ingenue confessus est.[1])

Anno 1666 Leibnitius libellum „de Arte combinationum“ in lucem edidit,[2]) quo in conscribendo se numerorum proprietatibus adeo delectatum esse autumat, ut vel postea, quidquid ab aliis litterarum studiis relictum sibi fuisset otii, id in illis perscrutandis tanquam animi sui relaxandi causa consumsisset; et quum jam tum paene puer animadvertisset, quam utiles essent differentiae ad summas inveniendas, has differentias sese ad series numerales traduxisse. Sciendum vero est, per longum tempus eum mathematica, ut ipse ait, tanquam Parergon tractasse, donec tandem desiderio quodam altiora id genus cognoscendi ductus iter suscepit in Britanniam et Galliam, quibus in terris tunc temporis clarissimi florebant mathematici. Parisiis cum Hugenio familiariter conversatus est, qui eum paulatim altioris calculi mysteriis initiavit, ita ut hanc illius institutionem pariter ac Mercatoris Logarithmotechniam, quam ex Britannia secum attulerat, viam sibi aperuisse dicat ad inveniendam circuli quadraturam arithmeticam, quam sub finem anni 1673 elucubratam primum anno 1682 in Actis Lipsiensibus cum orbe mathematico communicavit. Invenerat enim, quadrato circumscripto $= 1$ posito, aream esse:

$$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

quam quidem seriem earum omnium, quae ad illud usque tempus enodatae essent, et simplicissimam et maxime arridentem esse jure contendit.[3]) Attamen jam prius, quam Leibnitium, Jacobum Gregorium eam eruisse inque litteris ad Collinsium anno 1671 datis huic clam, id est taciturnitati ejus ac fidei, concredidisse Klügelius est testis.[4]) Quod

1) In epistola paulo ante commemorata, Nentoni Opusc. Tom. I, pag. 379.

2) Quae in sequentibus narrantur omnia ex eadem supra nominata epistola (ad Abbatem Conti) hausta sunt.

3) Commerc. epist. Nr. LII pag. 133.

4) In lexico math. pars I pag. 841.

si verum est, erravit Leibnitius primum se circuli aream serie numerorum rationalium exposuisse ratus.[1])

Sed quomodocunque res se habet, id tamen dubium non est, quin proprio Marte Leibnitius hanc seriem evicerit, et quidem per methodum suam transformationum, quae procul dubio alia non est, nisi qua Barrowius[2]) jam et Gregorius[3]) usi erant. Namque et Leibnitius perinde atque illi figuram quamlibet propositam, quo facilius eam dimeteretur, transmutabat in aliam aequipollentem rationalem, talem, ut in ejus aequatione ordinatae dimensio non ascenderet ultra cubum aut quadratum aut etiam simplicem dignitatem; quo peracto ipsa illa vel per divisionem Mercatoris more vel per extractionem radicis cubicae aut quadraticae ad series infinitas reduci poterat.[4]) Exemplum hujusmodi transformationis Leibnitius dedit in epistola ad Oldenburgium scripta anno 1676,[5]) cui simul plures series infinitas sibi enodatas inseruit hasce: Sit QAF (Fig. 4.) sector duabus rectis in centro Q concurrentibus et curva conica AF comprehensus; tangenti ad verticem AT occurrat tangens FT; ipsa AT vocetur t et rectangulum sub semiaxi recto in semiaxin transversum, id est parametrum, sit unitas; — erit sector hyperbolae, circuli vel ellipsis per semilatus trsnsversum divisus =

$$\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \pm \frac{t^{11}}{11} + \ldots\ldots;$$

signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in hyperbola, $-$ in circulo vel ellipsi. Dein propositis hisce seriebus numeralibus:

$$\text{I. } \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{80} + \tfrac{1}{99} + \tfrac{1}{120} + \ldots = \tfrac{3}{4}$$

$$\text{II. } \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{99} + \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}$$

1) Comm. epist. Nr. LII.

2) In „Lectionibus geometr.“ anno 1669 ed., lect. 7. 9. 10; cf. Klügel l. l. part. II p. 333.

3) In „Geometriae parte universali,“ libro „de vera circ. et hyperb. quadratura“ anno 1668 ed. subjuncta.

4) Cf. Montucla Hist. des math. T. II pag. 378.

5) Commerc. epist. Nr. LI pag. 131 et sqq. NB. ad hanc epistolam omnia, quae proxime sequuntur, spectant.

III. $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+ \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$
IV. $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+ \ldots\ldots\ldots\ldots$
V. $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}+ \ldots\ldots\ldots\ldots$
quartam definit esse aequalem areae circuli ABCD (Fig. 6) quintam vero aream hyperbolae aequilaterae BEFC exprimere, quum major BC dupla sit EF et quadratum inscriptum $=\frac{1}{4}$. Ex qua inversa vicissim elicuit hanc:

Si numerus aliquis unitate minor sit 1—m ejusque logarithmus hyperbolicus l,

erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} - \frac{l^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$, sin major, ut $1+n$, erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2.} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Sed priorem illam quum celerius appropinquare ad veritatem perspexisset, quomodo, ut sola sufficeret, etiam quum major esset unitate numerus, res instituenda esset docuit. Considerando enim logarithmum numeri $1+n$, mutato signo, eundem esse ae numeri $\frac{1}{1+n}$, unitate scilicet semper minoris, pro $1+n$ semper quoque ponendum esse praecepit $\frac{1}{1+n}$. Quibus expositis se directe pervenisse ait ad hanc seriem:

$$1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \ldots\ldots\ldots,$$

quae ex dato arcu a sinum complementi exhibet et ex qua postea sese intellexisse dicit demonstrari posse illam sibi anea communicatam pro inveniendo sinu recto:

$$a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hinc igitur vides etiam Leibnitium pariter ac reliquos nobis hic commemoratos in mathematicis perbene eruditos viros neque eruisse neque in usum vocasse series infinitas, nisi in figurarum geometricarum dimensione, imprimis vero in circuli et hyperbolae quadratura; quamquam negari nequit, eum, ut supra jam monuimus, ad illas pertractandas primum differentiarum consideratione perductum esse.

Namque initium suarum hujusmodi investigationum inde sumsit, ut modum quaereret inveniendi differentias omnis generis potestatum, cujus operis peragendi generalem tandem invenit regulam, in epistola ad Oldenburgium anno 1672 data descriptam.[1]) Ibi enim: „ad inquirendas, inquit, „potentiarum gradus dati utcunque distantium differentias „multiplicetur potentia gradus proxime praecedentis radicis majoris per differentiam radicum, et differentia potentiarum gradus proxime praecedentis per radicem minorem: „productorum summa erit quaesita differentia potentiarum, „quarum radices sunt datae.“ Ab hac autem differentiarum consideratione, in qua rem sibi tam prospere succedere viderat, mox ad series illas arithmeticas sese convertit, quarum termini sunt numeri figurati; in quibus perquirendis, quae antea de differentiis observaverat, ei maximo nimirum usui erant atque adjumento.[2]) Et hinc quoque, quum maxime id studeret, ut illiusmodi serierum summas obtineret, factum est, ut non modo illud assequeretur, verum etiam modum inveniret, colligendi terminos seriei cujuscunque infinitae fractionum, quarum numeratores unitates, denominatores vero numeri illi triangulares, aut pyramidales, aut triangulo-triangulares, cet. Quam rem ita instituit, ut de serie ad libitum assumta, hac:[3])

$$\text{I.}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots$$

subduceret omnes terminos praeter primum; quo facto utique relinquitur:

$$\text{II.}\quad 1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots;$$

$$\text{vel}\quad 1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\ldots\ldots;$$

1) Commerc. epist. Nr, XXX pag. 119.

2) Commerc. epist. I, I. pag. 114.

3) Ibidem in introductione pag. 13, et Klüg. pars IV sub voce „Summirbare Reihe;“ et Montucla: Hist. des math. II, 377; III, pag. 207 sqq. et IV, 638.

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\ldots\ldots;$$

cujus duplum erit:

$$\text{III. } 2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots\ldots\ldots.$$

Jam a serie II demtis omnibus terminis praeter primum remanebit:

$$\text{IV } \frac{1}{2} = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{4.5.6} + \ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{vel } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \ldots\ldots\ldots;$$

et a serie I integra subductis omnibus terminis praeter duos primos habetur:

$$\text{V. } 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{4.6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \ldots\ldots\ldots;$$

quae divisa per numerum 2 transit in hanc:

$$\text{VI. } \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \ldots \text{ in infinitum.}$$

En series illa nobis jam supra proposita! ex qua ceterae ibidem collocatae facillime deducuntur. Jucundissima mehercule serierum pertractio, in qua, quum non minus fructuosam esse eam cognovisset, Jacobus Bernoullius diu postea multumque versatus est.[1])

Haec fere omnia sunt, quae Leibnitius de seriebus infinitis in medium protulit, priusquam novum suum calculi genus in lucem ederet;[2]) quibus expositis ad exitum nobis perduxisse videmur disquisitionem nostram, cujus finem jamjam facientes si, quae dicta sunt, paucis comprehendi-

---

1) In tractatu: de seriebus infinitis earumque summa finita, quem adjunxit libello: „de Arte conjectandi" inscripto et Bononiae anno 1713 edito.

2) Anno 1684 in tractu: „nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus," inscripto; cf. Klüg. l. c. I, 842.

mus, primum revera circuli atque hyperbolae quadraturam, quarum altera cum inquisitione logarithmorum arctissime cohaeret, primam dedisse ansam videmus ad series infinitas eruendes; deinde vero ante calculum illum, cujus inventio dissertationem nostram definiat, earum doctrinam sane admodum mancam fuisse atque inchoatam. Quid? Qui plurimum in ea profecerant, Neutonus et Leibnitius invertere quidem seriem aliquam, id est exempli gratia ex hac: $z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$ deducere illam:

$$x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} - \ldots\ldots$$ [1])

sciebant, at regulam tamen legemve, ex qua series aliqua convergat, nec ne, certo dijudicetur, plane ignorabant; indicium saltem hujus notitiae invenitur nusquam. —

1) Neutoni Opusc. Tom. I, opusc. XI pag. 352 et 353 et Commerc. epist. Nr. LXIV pag. 186.

# VITA.

Natus sum Joannes Fridericus Mings fidei christianae catholicae addictus anno hujus saeculi duodevigesimo ante diem XV. Calendas Junias in Borussiae occidentalis vico Valcio oppido finitimo, cui nomen est Seegenfelde, patre Petro, tunc agelli possessore, nunc vero jam a tertio inde aetatis meae anno morte praematura mihi dolenter erepto, matre vero Erdmunda e gente Lenziana. Primis litterarum elementis in ludo ibidem vicano imbutus disciplinae Progymnasii Valcensis tunc ut hodie Malkowskio rectore clarissimo florentis traditus sum: ubi per quadriennium dilectissimorum praeceptorum: Zankei, Seidelii, Martinii, Maderi et Malkowskii institutionibus fruitus sum, quibus omnibus optime de me meritis gratias hic ago debitas! Inde cum testimonio discipuli classis Secundae dimissus Posnaniam me contuli, ubi tentata litterarum scientia mea in Gymnasio, quod est ad St. Mariam Magdalenam et tunc clarissimo Stocio rectore florebat, nunc vero reverendissimi Prabuckii consilio ac natu regitur, civibus illius classis adscriptus sum. Erudierunt me ibi per triennium doctissimi clarissimique viri: Wannowskius, Gladischius, Czwalina, Hoffmannus, Prabuckius, Spillerus et Mottyus, quibus omnibus, imprimis vero clarissimo Wannowskio, propter maxima de me merita summamque erga me humanitatem gratissimum ad mortem usque servabo animum! Examine, quod abeuntium vocant, superato, St. theologiae studio incensus seminarium Archidioecesanum ibidem rectore reverendissimo illustrissimoque Pohlio florens adii, ubi in clericorum ordinem cooptatus per alterum annum dimidiatum studiis theologicis incubui ducibus his viris reverendissimis clarissimisque: Bittnero in dogmatica, Alzogio in historia ecclesiastica pariter atque exegesi, Uidingio in philosophicis disciplinis, quibus omnibus, praecipue autem rev. Bittnero, pro summis de me meritis gratias ago quam maximas! Dein vero mutato studiorum consilio Vratislaviam profectus, anno MDCCCXL ante diem VIII Calendas Julias ab illustrissimo Hahn t. t. rectore magnifico inter cives academicos receptus et ab ill. Rohowskio t. philosophorum decano spectatissimo horum ordini adscriptus sum. Interfui per quadriennium scholis mathematicis Scholtzii, Koecheri, Frankenhemii et Kummeri; physicis Pohlii, Mülleri, Fischeri, Neesii ab Esenbeck, Gravenhorstii et a Boguslawskii, historicis Stenzelii, Kutzenii, et Roepellii; philologicis Ambroschii et Elvenichii; philosophicis tandem Rohows-

kii, **Thilonis** et **Branissii**; — quibus omnibus viris illustrissimis et doctissimis, praesertim vero ill. **Kummero**, **Stenzelio**, **Fischero** et **Müllero**, qui privatis etiam institutionibus ac prudentibus consiliis me adjuverunt animumque erga me benevolentissimum pluries una vice manifestarunt, maximas gratias debeo. Dimidiato tertio anno postquam et legibus parere academicis et, quae inde in me redundarunt, beneficiis frui ac privilegiis coepi, ill. Stenzelius roganti mihi benevole id concessit, ut privatis suis lectionibus historico-criticis interessem; ex quibus jam per longam annorum seriem ab ipso habitis quum tandem ante dimidium abhinc annum effloruisset seminarium regium historicum eodem Stenzelio et auctore et moderatore etiam id mihi contigit, ut per semestre integrum hujus seminarii essem sodalis; id quod magno mihi fructui fuisse palam profiteor.

Parimodo honorabilis mihi grataque semper memoria colendus est vir generosissimus Hugo de **Rothkirch**, cujus consuetudine jam per plures annos usus maximam inde utilitatem percepi. Ipse enim homo privatus quidem, (est enim ille toparcha Schottgaviensis in regione Vratislaviensi) sed tamen in litteris bene versatus quum in exercendis recentioribus linguis, tum praecipue in coeli contemplatione siderumque et, quae eodem referuntur, aliarum rerum astronomicarum cognitione paratissimo semper animo me adjuvit; quo facto me in perpetuum sibi devinxit!

Oblata hac opportuna occasione etiam non possum, quin et iis omnibus, qui inopem me ac pauperem conspicientes hanc egestatem meam gratissimis suis largitionibus sublevarunt, maxime vero Regimini Regio Posnaniensi et, quos benignissimos mihi fautores pio gratoque animo veneror, excellentissimis et ornatissimis ejusdem regiminis praesidibus: de Beurmanno, etiamdum illi provinciae praefectui providissimo, et Flottwellio, jamjam ipsius Regis nostri Serenissimi etc. in administrandis publicis rebus pecuniariis **ministro**, gratias agam maximas pro beneficiis munificentissime in me hucusque collatis, quibus solis mihi inter cives academicos versari concessum erat, quibusque non minus, quam ea, qualem semper in me habuerint, fiducia ac benevolentia ut me vere dignum praestem, a Deo O. M. continuo precabor!

## Quas defensurus sim, sententiae:

I. Experientia omnis scientiae fundamentum est.

II. Vita omnium rerum creatarum communitas.

III. Omnis vita in hac universa rerum natura in contrariorum conflictione et consociatione posita est.

IV. Quae vulgo dicuntur esse contraria, revera non sunt.

V. Quae plerumque vocantur imponderabilia, nihil, nisi singulares quaedam universalis vitae formae ideoque unicuique corpori propriae sunt et in chemismo junctim apparent omnes.

VI. Chemismus vitae universalis forma generalissima.

VII. Atomi non sunt ponendae.

VIII. Corpora simplicia in hac rerum natura non dantur; et si dantur, duobus plura non sunt.

IX. Errant, qui calculi infinitesimalis primordia jam apud Archimedem inveniri autument; errant etiam, qui soli Neutono ac Leibnitio ejus inventionem adscribant; — initia ejus Cavallerius et, qui hunc secutus est, Wallisius posuerunt.